PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 8 — 15. April 1940 — Redaktionsschluß für Nr. 10 am 1. Mai 1940 — 41. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

E. Justi und J. Kramer, Galvanomagnetische Versuche über den elektrischen Leitungsmechanismus des Bariums. S. 197.

H. Möbius, Experimentelle Untersuchung des Widerstandes und der Geschwindigkeitsverteilung in Rohren mit regelmäßig angeordneten Rauhigkeiten bei turbulenter Strömung. S. 202.

Besprechungen:

F. Diepgen, Das physikalische Denken in der Geschichte der Medizin. S. 220.

Ergebnisse der kosmischen Physik. Bd. IV. Physik der Hydro- und Lithosphäre. S. 220.

G. Flügel, Berechnung von Strahlapparaten. S. 220.

E. Hiedemann, Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung. S. 220.

J. C. Poggendorffs biographisch-literarisches Handwörterbuch für Mathematik, Astronomie, Physik mit Geophysik, Chemie, Kristallographie und verwandte Wissensgebiete. Bd. VI, 3. S. 227.

F. Löwe, Optische Messungen des Chemikers und des Mediziners. 3. Aufl. S. 227.

W. Schlink, Technische Statik. Ein Lehrbuch zur Einführung ins technische Denken. S. 227.

M. Volmer, Kinetik der Phasenbildung. S. 227.

C. V. Raman, Jubilee Volum of Original Papers, presented in Commemoration of his fiftieth birthday. S. 228.

Nachrichten. S. 228.

Berichtigung. S. 228.

ABHANDLUNGEN

Galvanomagnetische Versuche über den elektrischen Leitungsmechanismus des Bariums

Von E. Justi und J. Kramer

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin-Charlottenburg

1. Problemstellung

Der Umstand, daß Metalle durch ein magnetisches Querfeld $\mathfrak{H}$ eine Vermehrung ihres elektrischen Widerstandes erfahren, die den aus der Theorie des freien isotropen Elektronengases berechneten Betrag größenordnungsmäßig übertrifft, wurde durch den experimentellen Nachweis der kristallographischen Anisotropie der Widerstandsvermehrung selbst in höchstsymmetrischen (kubischen) Kristallen wie Gold aufgeklärt Justi und Scheffers (1). Die theoretische Berücksichtigung der hieraus gefolgerten anisotropen Bindung der Leitungselektronen an das Metallionengitter beseitigte nicht nur die bisherige Diskrepanz hinsichtlich des Betrages der magnetischen Widerstandszunahme $\Delta\varrho_\perp$ infolge eines zum Strom $\mathfrak{J}$ senkrechten Magnetfeldes $\mathfrak{H}_\perp$, sondern sie erklärte auch das Auftreten einer endlichen Widerstandszunahme $\Delta\varrho_\parallel$ im magnetischen Längsfeld $\mathfrak{H}_\parallel$. Um die Abweichungen des Leitungsmechanismus der Metalle vom universellen Modell des freien isotropen Elektronengases zu untersuchen, sind anschließend Messungen an zahlreichen anderen kubisch kristallisierten Metallen ausgeführt worden Justi und Scheffers (2)]. Es zeigte sich dabei, daß die magnetische Widerstandszunahme bei den verschiedenen Metallen in recht verschiedener Weise von Temperatur, Restwiderstand, magnetischer Feldstärke und Kristallorientierung abhängt; lediglich Metalle gleicher Valenz und ähnlicher Kristallstruktur (raum- oder flächenzentriertes Gitter) lassen sich zu einem Erscheinungstypus zusammenfassen. Unter diesen „Leitfähigkeitstypen" erwies sich als der einfachste der, dem Wolfram (3) und Molybdän (4) angehören; hier gelten folgende einfache Gesetzmäßigkeiten:

1. Die magnetische Widerstandszunahme $\Delta\varrho_\perp$ im Querfeld ($\mathfrak{H} \perp \mathfrak{J}$) ändert sich beim Übergang zu einer anderen kristallographischen Lage von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ nur um einen Faktor, der weitgehend unabhängig von Temperatur, Restwiderstand und Feldstärke ist;
2. mit steigender Feldstärke und sinkendem feldfreien Widerstand $\varrho_{H=0,T}$ nimmt der Quereffekt ($\Delta\varrho_\perp$) recht genau mit $H^2\varrho_{H=0,T}$ zu;
3. die Widerstandszunahme $\Delta\varrho_\parallel$ im magnetischen Längsfeld ($\mathfrak{H} \parallel \mathfrak{J}$) besitzt einen niedrigen Sättigungswert und verschwindet deshalb bei hohen Feldstärken und tiefen Temperaturen gegen den Quereffekt $\Delta\varrho_\perp$.

Theoretisch haben sich diese Gesetzmäßigkeiten für ein kubisch raumzentriertes zweiwertiges Metall ergeben, das als einfachstes Metallmodell von Kohler (5) wellenmechanisch einigermaßen streng durchgerechnet werden

konnte; hier kann der Einfluß der Bindungsanisotropie der Elektronen (vgl. Jones und Zener (6)) durch das dreifach periodische elektrostatische Potential des Metallionengitters berücksichtigt werden, wobei die Eigenwertverteilung der Leitungselektronen in der Nähe der Fermischen Grenzenergie ebenso wie für das freie isotrope Elektronengas einfach durch quadratische Formen des Ausbreitungsvektors (8) dargestellt werden kann; die Annahme einer mittleren isotropen temperaturabhängigen Stoßzeit ($\bar{\tau}$) der Elektronen entspricht der elastischen Isotropie des Metalls und ist inzwischen durch Verifizierung der Kohlerschen Regel vielfach experimentell bestätigt worden.

Daß diese für zweiwertige Metalle ausgearbeitete Theorie für das sechswertige *W* (3) und *Mo* (4) zutrifft, erklärt sich so, daß von den sechs Valenzelektronen nur die beiden *s*-Elektronen zur Leitung merklich beitragen, während die vier *d*-Elektronen wegen ihrer festeren Bindung hier ausscheiden. Davon abgesehen fehlt eine experimentelle Prüfung der Leitfähigkeitstheorie für dieses einfachste Modell, das in der Natur nur im Barium vorhanden ist. Mit entsprechenden Messungen an dem schwer rein zu erhaltenden und zu handhabenden Barium beschäftigen sich die folgenden Versuche; bei ihnen wurde auch untersucht, ob die Widerstandszunahme l_0, die von der Theorie vorausgesagten extrem hohen Beträge annimmt.

2. Herstellung der Proben und Versuchsanordnung

Aus dem im Handel erhältlichen reinsten Barium wurden verschiedene Proben (*Ba* 1 bis *Ba* 5) geschnitten, die mit einem Restwiderstand $z = R_{0°} : R_{273°} \approx 0{,}03$ ähnlich unrein waren wie die Proben von Meißner und Voigt (7). Dieser hohe Restwiderstand fällt um so mehr ins Gewicht, als er sinnvoll nicht auf 273°, sondern die charakteristische Temperatur θ zu beziehen ist, die mit 116° noch nicht die Hälfte der Eispunktstemperatur beträgt. Als Vertreter dieser unreineren Proben ist im folgenden *Ba* 3 angeführt[1]). Das wesentlich reinere *Ba* 2 von Meißner, Franz und Westerhoff (8) war nicht mehr brauchbar, jedoch gelang es, Proben aus dem gleichen Material zu erhalten, die Herr Direktor Dr. Friederich von der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung, Berlin SO, in zuvorkommender Weise zur Verfügung gestellt hatte. Dieser Reinheitsgrad ($z = 0{,}007$) ist im folgenden durch die Probe *Ba* 6 vertreten. Die weitere Reinigung des Ausgangsmaterials durch Destillation und durch Kondensation in einkristalliner Form (Kroll (9)) sollte erst vorgenommen werden, wenn die Untersuchungen an den vorliegenden polykristallinen Proben dies als lohnend erscheinen ließen.

Das bisherige Verfahren, die Strom- und Spannungsdrähte durch Federn mit dem Barium zu verbinden, erwies sich als sehr unzuverlässig, weil sich das Barium sehr schnell mit einer isolierenden Oxydhaut bedeckt, selbst im Kohlensäurestrom. Unsere ausgedehnten Versuche, die *Cu*-Drähte unmittelbar anzulöten, hatten Erfolg, nachdem wir ein Spezialaluminiumlot verwandten; die Lötung wurde mit einem sehr heißen Kolben in einer CO_2-Atmosphäre an dem unmittelbar vorher blankgeschabten *Ba*-Streifen vorgenommen. Die angelöteten Kontakte erwiesen sich als beständig, ließen eine große Strombelastung zu und ergaben durch wenig schwankende Spannungsabfälle eine hohe Meßgenauigkeit. Die Bariumproben wurden ständig unter Paraffinöl aufbewahrt und nur während der Messung ohne Hülle in das Kältebad eingebracht. Im übrigen war die Meßanordnung mit dem fünfdekadigen Diesselhorstschen Kompensator und dem großen Boasmagneten dieselbe, wie sie kürzlich bei Messungen an Indium (10) beschrieben war.

3. Meßergebnisse für die Temperaturabhängigkeit des feldfreien Widerstandes

In der Zahlentafel 1 sind Meßergebnisse für die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes der *Ba*-Proben bei Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes ($H = 0$) zusammengestellt und mit den Meßergebnissen von Meißner und Mitarbeitern verglichen; für alle aus den Beobachtungen abgeleiteten Widerstandsverhältnisse $r_{t°\,\mathrm{beob}} = R_{T°} : R_{273°}$ sind nach der Nernst-Matthießenschen Regel: $r_{t°\,\mathrm{red}} = (r_{t°\,\mathrm{beob}} - z) : (1 - z)$ die als additiv angenommenen Zusatzwiderstände z und reduzierten Widerstandsverhältnisse $r_{t°\,\mathrm{red}}$ berechnet. Die beiden reinsten Proben, nämlich *Ba* 6 und diejenige von Meißner, Franz und Westerhoff (8), zeigen bei annähernd gleichem Restwiderstand gut übereinstimmende Zahlenwerte für $r_{t°\,\mathrm{beob}}$ und $r_{t°\,\mathrm{red}}$. Dagegen fallen für die beiden unreineren Proben die reduzierten Widerstände größer aus; der Restwiderstand ist, falls er nicht sehr klein ist, nicht konstant, sondern steigt mit der Temperatur an. Dieselbe Erscheinung ist bei anderen Metallen schon von Grüneisen (12) bemerkt worden.

1) Die röntgenspektroskopische Analyse, für die wir Herrn Technischem Sekretär Hohberg danken, ergab 0,1 Proz. *Sr* und 0,05 Proz. *Th* als Verunreinigungen.

Zahlentafel I

Temperaturabhängigkeit des Widerstandes der Proben *Ba* 3 und *Ba* 6 sowie der *Ba*-Proben von Meißner und Voigt und von Meißner, Franz und Westerhoff. R_{273} von *Ba* 6 = 3,467 · $10^{-3}\Omega$, Abstand der Stromdrähte 34 mm, der Spannungsdrähte 26 mm; mittlere Dicke ~ 1 mm

$T°$ abs	*Ba* 3	*Ba* 6		Meißner und Voigt (7)		Meißner, Franz und Westerhoff (8)	
	r_{beob}	r_{beob}	r_{red}	r_{beob}	r_{red}	r_{beob}	r_{red}
273	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
85,7				$0,314_9$	$0,283_1$		
78		$0,215_{52}$	0,208	$0,284_3$	$0,251_1$		
20,4	$0,043_0$	$0,027_{53}$	0,0205	$0,067_{67}$	$0,023_{82}$	$0,027_9$	$0,020_9$
14,0		$0,015_{18}$	0,0081				
4,22		$0,007\,8_{68}$	$0,0000_8$	$0,045_0$	$0,000_7$	$0,008\,3_6$	$0,000\,4_1$
3,44				45_1	$0,000_8$	$0,008\,2_3$	$0,000\,2_8$
2,24							
1,85		$0,007\,0_{58}$	$0,0000_3$				
1,30						$0,007\,9_7$	$0,0000_2$
1,26				$0,044_8$	$0,000_3$		
0		$0,007\,0_3$	0,0	$0,044_3$	0,0	$0,007\,9_5$	0,0

Ferner ist bemerkenswert, daß der ideale Widerstand bei tiefen Temperaturen sehr langsam abfällt; zwischen 20,4° und 14,0° abs, wo $r_{red} > z$ ist und daher sicherer als im *He*-Gebiet abgeleitet werden kann, fällt der Widerstand nämlich nur um den Faktor 2,5, während das T^4-Gesetz den Faktor 4,50, das T^5-Gesetz gar 6,55 verlangen würde.

Infolgedessen ist es weder nach dem Grüneisenschen T^4-Gesetz noch nach der Blochschen T^5-Formel möglich, aus den vorliegenden Messungen eine einigermaßen konstante charakteristische Temperatur θ abzuleiten; soweit eine solche Temperatur für die Diskussion der Meßergebnisse benötigt wird (siehe unten), ist sie daher aus der Lindemannschen Schmelzpunktsformel zu $\theta_D = 116°$ berechnet worden.

4. Meßergebnisse für die Widerstandsvermehrung $\Delta\varrho_\perp$ im magnetischen Querfeld ($\mathfrak{H} \perp \mathfrak{J}$)

Messungen über die magnetische Widerstandsvermehrung ($\Delta\varrho = f(H, T)$ wurden nur im Querfeld ($\mathfrak{H} \perp \mathfrak{J}$), nicht im Längsfeld ($\mathfrak{H} \parallel \mathfrak{J}$) vorgenommen, weil erfahrungsgemäß für alle Metalle bei nicht zu kleinen Werten von $R_{beob}/R_{\theta°}$, die für *Ba* bei der mäßigen Reinheit und niedrigen charakteristischen Temperatur nicht unterschritten werden konnten, der Längseffekt von derselben Größenordnung ist wie der Quereffekt und daher kein spezielles Interesse bietet. Die Meßergebnisse für die Widerstandsvermehrung in magnetischen Querfeldern bis zu 35000 Gauß bei Temperaturen zwischen 20,4° und 1,8° abs sind in der Zahlentafel II (s. S. 200) zusammengestellt und für die reinere Probe *Ba* 6 in der Abb. 1 graphisch dargestellt. Ähnlich wie beim polykristallinen Wolfram sind die Isothermen der Widerstandszunahme offenbar annähernd quadratische Parabeln; die durch die tiefste Temperatur (1,8° abs) und das höchste Magnetfeld (35000 Gauß) erreichbare Widerstandszunahme beträgt allerdings nur das Dreifache des feldfreien Widerstandes, gegenüber dem etwa 10^5fachen bei der reinsten Wolframprobe von Justi und Scheffers (3). Um aber einen rationellen Vergleich der hier beobachteten Widerstandsvermehrungen mit den in der Einleitung erwähnten Berechnungen und Messungen zu ermöglichen, muß der Einfluß von Restwiderstand z und charakteristischer Temperatur θ in geeigneter Weise berücksichtigt werden.

5. Diskussion der Meßergebnisse

Die Möglichkeit hierzu bietet die Kohlersche Regel (11) in ihrer reduzierten Form, wie wir sie kürzlich erstmals auf die entsprechenden Beobachtungen an Indium (10) angewandt hatten; nach dieser Regel ist die relative Widerstandsvermehrung $\Delta\varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T}$ unabhängig von größeren Variationen der Temperatur und des Restwiderstandes lediglich eine Funktion des Argumentes H/r; der Einfluß der für die verschiedenen Metalle verschieden starken Gitterschwingungen kann in erster Näherung eliminiert werden, wenn statt der hier physikalisch bedeutungslosen Eispunktstemperatur 273° die charakteristische Temperatur θ_D eingesetzt wird. Es sei daher auch hier wieder die relative Widerstandsvermehrung nicht als Funktion von H/r, sondern H/τ mit $\tau = r_T/r_{\theta°}$ betrachtet; r und τ unterscheiden sich nach der

Zahlentafel II

Relative magnetische Widerstandsänderungen $\Delta\varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T}$ von *Ba* 3 und *Ba* 6 in Abhängigkeit von der Stärke des magnetischen Querfeldes $H_\perp$ bei verschiedenen Temperaturen. Zahlenwerte des Quotienten Querfeld feldfreies reduziertes Widerstandsverhältnis.

$H_\perp$ kG	$10^3 H_\perp/T$	$\log \varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T}$
Ba 6, 1.85 abs. $\tau_{1.85}$ = 0.0173		
33.9	1.952	3.085
29.4	1.694	2.879
Ba 6, 4.22 abs. $\tau_{4.2}$ = 0.0393		
33.9	1.751	3.014
33.9	1.751	3.014
31.0	1.601	2.955
28.8	1.487	2.251
27.8	1.435	2.111
20.8	1.074	1.695
23.7	1.225	1.934
17.6	0.910	1.034
15.0	0.774	0.768
10.9	0.563	0.512
8.6	0.444	0.303
6.3	0.325	0.231
4.5	0.232	0.112
Ba 6, 14 abs. τ_{14} = 0.0373		
33.2	0.888	0.662
31.1	0.832	0.537
29.6	0.792	0.650
23.3	0.623	0.542
17.9	0.479	0.337
Ba, 20.4 abs. τ_{20} = 0.0576		
33.2	0.405	0.41
31.1	0.466	0.365
29.9	0.374	0.259
23.5	0.347	0.232
18.0	0.266	0.141
8.5	0.125	0.044
Ba 3, 20.4 abs. $\tau_{20.4}$ = 0.1058		
35.0	0.330	0.199
33.4	0.315	0.148
30.7	0.290	0.130
28.8	0.272	0.114
26.6	0.251	0.102
23.2	0.219	0.070
19.8	0.187	0.052
17.3	0.163	0.036
14.9	0.132	0.020
9.0	0.085	0.011

Grüneisenschen Formel (12) bei einem Zahlenwert von $\vartheta = 116°$ um den konstanten Faktor $R_{273°}/R_{116°} = 2.461$.

In diesem „reduzierten Kohlerschen Diagramm" der Abb. 2 sind sämtliche Daten der Zahlentafel II nach Präparat und Temperatur unterschiedlich eingetragen, und man erkennt,

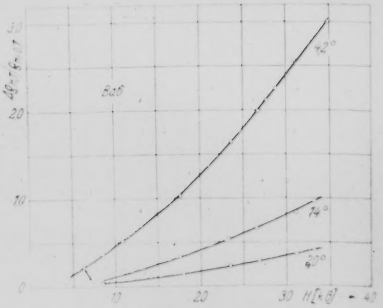

Abb. 1. Isothermen der relativen Widerstandszunahme $\log \varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T}$ als Funktion vom magnetischen Querfeld $H_\perp$ für die Temperaturen 4.2° (obere Kurve), 14° (mittlere Kurve) und 20.4° (untere Kurve) für *Ba* 6.

daß alle Meßpunkte angenähert auf einer Geraden liegen, deren Neigung bei der doppelt logarithmischen Teilung des Diagramms auf eine Proportionalität der Widerstandszunahme mit etwa H^2 schließen läßt. Indessen liegen die Meßwerte z. B. von *Ba* 6 bei 14° und bei 20.4° nicht

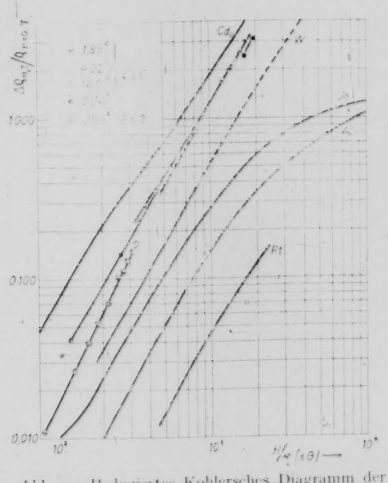

Abb. 2. Reduziertes Kohlersches Diagramm der relativen Widerstandsänderung $\log \Delta\varrho_{H,T}/\varrho_{H=0,T}$ als Funktion von $\log H_\perp/T$ für *Ba* 6 nach Zahlentafel I und Abb. 1. Zum Vergleich sind die Kurven für *Cd*, *In*, *Al* und *Pt* eingezeichnet.

ganz genau auf derselben Kurve, sondern auf zwei noch deutlich getrennten Ästen.

Diese Abweichung von der Kohlerschen Regel läßt sich ebenso wie die Abweichung von der Nernst-Matthießenschen Regel leicht erklären. Beide Formeln sind nämlich unter der Voraussetzung theoretisch ableitbar (13), daß der Zusatzwiderstand so klein ist, daß er lediglich durch eine Abänderung der mittleren Stoßzeit $\bar{\tau}$ der Leitungselektronen berücksichtigt werden kann und daß noch keine Änderung der Zahl der „freien" Elektronen stattfindet. Eine Änderung der Anzahl der Leitungselektronen hat aber die größten Folgen bei den zweiwertigen Metallen, weil entsprechend der Fermistatistik die erste Brillouinzone gerade zwei Elektronen fassen kann und weil nur durch die Überlappung der ersten und zweiten Brillouinzone eine elektrische Leitfähigkeit zustande kommt. Der Strom wird also von sehr wenigen effektiven Leitungselektronen getragen und ist deshalb gegen eine Änderung der Leitungselektronenzahl besonders empfindlich. Tatsächlich zeigt auch das Wolfram mit seinen zwei s-Elektronen für größere z-Werte ähnliche Abweichungen von der Kohlerschen und der Nernst-Matthießenschen Regel, in Übereinstimmung mit der hier gegebenen Erklärung.

Um ferner die Frage beantworten zu können, ob das Barium die von der Theorie erwarteten und bei Wolfram (3) und Kadmium (14, 15) nachgewiesenen extrem hohen Beträge der relativen Widerstandszunahme aufweist, sind in Abb. 2 Kurven für diese beiden Metalle mit eingetragen [vgl. hierzu auch die Abb. 5 von (10)]. Man erkennt, daß die Bariumkurve noch über der für Wolfram, aber unterhalb der Kurve für *Cd*-Kristallstäbe parallel der hexagonalen Hauptachse ($Cd_{\parallel}$) liegen. Daß hier $Cd_{\parallel}$ eine noch höhere Widerstandsvermehrung als *Ba* zeigt, hängt offenbar von der Wahl des θ-Wertes $\theta_{Cd} = 108°$ ab, die insofern nicht ganz willkürfrei ist, als *Cd* ebensowenig wie *Ba* dem T^5-Gesetz folgt und als die beim *Ba* benutzte Lindemannsche Schmelzpunktformel auf *Cd* wegen der Anisotropie der θ-Werte nicht anwendbar ist. Da aber auch das polykristalline *Cd* sehr hohe Beträge von $\Delta\varrho/\varrho$ aufweist (14), dürfte es sicher sein, daß *Ba* zwar etwas geringere magnetische Widerstandserhöhungen als $Cd_{\parallel}$ aufweist, daß es aber von sämtlichen regulären Metallen bei gleichem H/τ-Wert den stärksten magnetischen Quereffekt erzielt. Praktisch freilich kann man die von Justi und Scheffers (3) bei Wolfram erzielten Höchstwerte der relativen Widerstandsvermehrungen auf das Hunderttausendfache bei *Ba* nicht erreichen, weil bei *Ba* die reduzierten Restwiderstände z/θ und die reduzierten Versuchstemperaturen T/θ wesentlich höher sind als bei dem extrem rein erhältlichen Wolfram mit seinem hohen θ-Wert ($\theta = 395°$).

Jedenfalls lehrt die Abb. 2, daß die Folgerung der Kohlerschen Theorie (5) des zweiwertigen kubisch-raumzentrierten Metalls voll erfüllt ist, wonach das *Ba* eine besonders hohe Widerstandsvermehrung im magnetischen Querfeld besitzt, die mit H/τ annähernd quadratisch unbeschränkt anwächst. Ob auch die anderen Folgerungen der Theorie zutreffen, wie die Temperatur- und Feldstärkenunabhängigkeit des Anisotropiefaktors $\Delta\varrho_{max}/\Delta\varrho_{min}$ oder wie die Sättigung des magnetischen Längseffektes $\Delta\varrho_{\parallel}$, können erst neue Versuche an sehr viel reineren Bariumeinkristallen lehren, die nach Beendigung der hier beschriebenen orientierenden Messungen in Angriff genommen sind.

Zusammenfassung

Die Auffindung der Anisotropie der magnetischen Widerstandsvermehrung veranlaßt die Theorie, das einfache Metallmodell des freien isotropen Elektronengases aufzugeben und die Wechselwirkung der Leitungselektronen mit dem Gitter der Metallionen genauer zu berücksichtigen; den von Justi und Scheffers beschriebenen besonders einfachen Erscheinungen bei Wolframkristallen entspricht der wellenmechanisch von Kohler durchgerechnete Fall des zweiwertigen kubisch-raumzentrierten Metalls. Dieser Leitungstypus ist streng genommen nur im Barium verwirklicht; in diesem Zusammenhang werden Messungen über die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von verschieden reinem Barium von Temperaturen zwischen 1,85° bis 273° abs und magnetischen Querfeldern bis zu 35000 Gauß unternommen. Es ist gelungen, die Zuleitungsdrähte an das Barium anzulöten, wodurch sich eine erhöhte Genauigkeit der Widerstandsmessungen ergab. Ohne äußeres Magnetfeld fällt der Widerstand bei tiefen Temperaturen wesentlich langsamer als mit T^4 ab; es treten ferner Abweichungen von der Nernst-Matthießenschen Regel auf. Die magnetische Widerstandserhöhung wächst ungefähr mit H^2; die Darstellung im reduzierten Kohlerschen Diagramm $\Delta\varrho_{B,T}/\varrho_{B=0,T} = f(H/\tau)$ läßt erkennen, daß alle beobachteten Widerstandserhöhungen annähernd eine quadratische Funktion von H/τ sind, ziemlich unabhängig von Änderungen in Restwiderstand, Temperatur und Magnetfeld und ohne Andeutung einer Sättigung. In diesem Diagramm zeigt *Ba* mit dem aus der Lindemannschen Schmelzpunktsformel abgeleiteten Wert von $\theta = 116°$ eine Widerstandserhöhung durch das magnetische

Querfeld, die für gleiche H/τ-Werte größer ist als für alle anderen kubischen Metalle. Insofern werden die Folgerungen der Kohlerschen Theorie des *Ba*-Typus des Leitungsmechanismus bestätigt. Abweichungen von der Nernst-Matthießenschen und der Kohlerschen Regel können einheitlich aus der Zweiwertigkeit des *Ba* erklärt werden.

Zum Schluß möchten wir nicht versäumen, Herrn Direktor Dr. Friederich für die Überlassung des reinen *Ba* zu danken, ebenso der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die uns den hier wieder benutzten großen Boasmagneten und eine technische Hilfskraft zur Verfügung gestellt hat.

Literaturverzeichnis

1) E. Justi und H. Scheffers, Physik. Zeitschr. **37**, 385 und 475, 1936 (*Ju*).
2) E. Justi und H. Scheffers, Metallwirtschaft **17**, 1357, 1938 (Zusammenfassung).
3) E. Justi und H. Scheffers, Physik. Zeitschr. **37**, 700, 1936; **38**, 891, 1937 (*H*).
4) E. Justi und A. Foroud, Physik. Zeitschr. **40**, 501, 1939 (*Mo*).
5) M. Kohler, Physik. Zeitschr. **39**, 9, 1938 (Theorie des *Ba*-Typus).
6) H. Jones und C. Zener, Proc. Roy. Soc. London **145**, 269, 1934.
7) W. Meißner und B. Voigt, Ann. d. Phys. **7**, 761, 1930.
8) W. Meißner, H. Franz und H. Westerhoff, Ann. d. Phys. **13**, 555, 1932.
9) W. Kroll, in: A. E. van Arkel, Reine Metalle, S. 99. Verlag von J. Springer, Berlin 1939.
10) A. Foroud, E. Justi und J. Kramer, Physik. Zeitschr. **41**, 113, 1940 (Indium).
11) M. Kohler, Ann. d. Phys. **32**, 211, 1938 (Kohlersche Regel).
12) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. **16**, 530, 1933 (T^5-Formel).
13) W. Meißner, Galvanomagnetische und thermomagnetische Effekte. In: Handb. d. Experim.-Physik von Wien-Harms, Bd. XI/2, S. 303. Leipzig 1935.
14) C. J. Milner, Proc. Roy. Soc. London **160**, 207, 1937 (*Cd*).
15) E. Justi und J. Kramer, Physik. Zeitschr. **41**, 1940 (im Erscheinen) (*Cd*).

Berlin-Charlottenburg, im März 1940.

(Eingegangen 16. März 1940)

Experimentelle Untersuchung des Widerstandes und der Geschwindigkeitsverteilung in Rohren mit regelmäßig angeordneten Rauhigkeiten bei turbulenter Strömung

Von Heinz Möbius[1])

I. Einleitung

1. Kurzer Überblick über die bisherigen Arbeiten zur Strömung in rauhen Rohren

Das Gesetz des Widerstandes der turbulenten Strömung in glatten Rohren wurde von R. Hermann [1] für Reynoldssche Zähligkeiten $Re = \frac{\bar{u}\,d}{\nu}$ ($\bar{u}$ = mittlere Strömungsgeschwindigkeit, d = Rohrdurchmesser, ν = kinematische Zähligkeit) von $2 \cdot 10^4$ bis $2 \cdot 10^6$ mit einer Streuung der Meßwerte $\pm 0{,}5$ Proz. bestimmt. Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen von J. Nikuradse [2]. Durch die umfangreiche Arbeit von J. Nikuradse [3] konnten die Gesetze der Geschwindigkeitsverteilung in glatten Rohren festgelegt werden. Einige Ergebnisse werden durch vorliegende Arbeit bestätigt. L. Prandtl [4, 5] benutzte die Messungen von Nikuradse als Grundlage seiner Theorie für Geschwindigkeitsverteilung und Rohrwiderstand.

Innerhalb der in der Technik vorkommenden Reynoldsschen Zahlen läßt sich Widerstand und Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Strömung in glatten Rohren, Kanälen und längs glatter Platten auf Grund der genannten und einiger anderer Arbeiten berechnen. Im allgemeinen ist aber die Strömung bei rauhen Wandungen in Natur und Technik vorherrschend. Um den Widerstand rauher Rohre zu bestimmen, sind schon von einer großen Anzahl von Forschern Messungen mit den verschiedensten rauhen Wänden ausgeführt worden. Eine übersichtliche Zusammenstellung dieser Arbeiten bis zum Jahre 1932 findet sich in dem Handbuch der Experimentalphysik [6]. Hiervon ist z. B. die Arbeit von K. Fromm [7] zu erwähnen, der verschiedene systematische Rauhigkeiten benutzte. Auf Grund dieser und vieler älterer Messungen gelangte man zu einer Unterscheidung von Wandrauhigkeit und Wandwelligkeit mit verschiedenen Widerstandsgesetzen. T. E. Stanton [8] und L. Schiller [9] stellten Messungen an Rohren an, in die innen Gewinde eingeschnitten waren.

Von den neueren Arbeiten ist die von J. Nikuradse [10] zu nennen, der den Widerstand und die Geschwindigkeitsverteilung von 6 Rohren bestimmte, die durch aufgeklebten

[1]) D. 15.

Sand gleicher Korngröße künstlich rauh gemacht worden waren. Er prüfte dabei als erster die von L. Prandtl [5] angegebene Beziehung zwischen Widerstandsbeiwert und relativer Rauhigkeit k/r (k = Korngröße, r = Halbmesser des Rohres) nach. Diese lautet:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = 2\log\frac{r}{k} - a\,, \qquad (1)$$

wobei ψ definiert ist: $\psi = \dfrac{\Delta p \cdot 2d}{l \cdot \varrho \bar{u}^2}$ (siehe auch S. 209). Die Gültigkeit dieser Beziehung ist nach den Voraussetzungen der Theorie an das quadratische Widerstandsgesetz (ψ = const) geknüpft. Ihre universelle Bedeutung liegt darin, daß beim Übergang zu anderen Rauhigkeitsformen und -anordnungen lediglich der Wert a sich ändern soll. Nikuradse bestimmte ihn für seine „Sandrauhigkeiten" zu 1,74.

Eine weitere Arbeit mit Sandrauhigkeiten ist die von C. F. Colebrook und C. M. White [11], die in einem Rohre Sandkörner von zwei Durchmessern ($k_1 : k_2 = 1 : 10$) und verschiedener gegenseitiger Verteilung anbrachten. Diese Verfasser studierten ausführlich das Übergangsgebiet von laminarer in turbulente Strömung. Sie erhielten bei nicht gleich großen Rauhigkeiten einen allmählichen Übergang von laminarem zu turbulentem Widerstandsbeiwert in der Art, wie er auch bei natürlich rauhen, etwa Gußeisenrohren, auftritt, während bei Nikuradse mit seinen gleich großen Körnern ein schärferer Übergang herrschte.

H. Schlichting [12] befestigte auf der einen Seite eines rechteckigen Kanals Kugeln, Kalotten, Kegel, „kurze" und „lange" Winkel als Rauhigkeitselemente und variierte deren Abstand. Er führt als praktische Rechengröße die „äquivalente Sandrauhigkeit" k_s ein, d. i. diejenige Korngröße der Nikuradseschen Sandrauhigkeit, die denselben Widerstand wie das Versuchsrohr ergibt. Von Interesse ist noch seine Feststellung, daß der größte Widerstand nicht bei der größten Dichte der Rauhigkeitselemente auftritt.

V. Streeter [13] schneidet in Rohre Rillen verschiedener Form, Tiefe und verschiedenen Abstandes und bestimmt auch die „äquivalente Sandrauhigkeit". Seine Messungen lassen erkennen, daß die Form der Rauhigkeitselemente einen ebenso großen Einfluß auf den Widerstand der rauhen Rohre hat, wie ihre Größe. Die beiden amerikanischen Arbeiten von W. Tripp [14] und V. J. Skoglund [15] beschäftigen sich mit der Nachprüfung der Gleichung (1). Beide bestimmen für je vier durch Rillen rauh gemachte Kanäle die „äquivalente Sandrauhigkeit" und finden die Prandtlsche Gleichung innerhalb ihrer Meßgenauigkeit erfüllt. Weiterhin ist die Arbeit von F. Schultz-Grunow [16] zu erwähnen, der den Widerstand von rauhen Wandungen bestimmt, wie sie in der Schiffbautechnik vorkommen. Er nennt sie „mäßig rauhe Wände", ein Begriff, der sich etwa mit dem der „Wandwelligkeit" decken dürfte.

Durch die Art der Rauhigkeiten und deren Anordnung im Rohr ist die Arbeit von F. Arredi [17] mit der hier vorliegenden nahe verwandt. Arredi befestigte in einem Rohr Blenden, die sehr große relative Rauhigkeiten ($k/r = 0{,}6$; 0,5; 0,4; 0,3 und 0,2) hatten, in einer relativen Entfernung L_2/k von 0,84 bis 35,0, wobei L_2 die absolute Entfernung der Blenden bedeutet. Der Meßbereich der Reynoldsschen Zahlen war sehr gering (bei der kleinsten Rauhigkeit etwa von 5000 bis 17000, bei der stärksten von 21000 bis 48000). Trotzdem lassen sich seine Ergebnisse, wie im Verlauf der vorliegenden Arbeit gezeigt werden wird, den unsrigen gut angliedern.

2. Aufgaben der vorliegenden Arbeit

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist eine doppelte. Zunächst ist ihr Zweck der, aus gut definierten und der Messung gut zugänglichen Rauhigkeitselementen in ebenfalls gut definierter Anordnung eine genau definierte rauhe Wand herzustellen. Dies geschah durch Einfügung von zahlreichen Ringblenden in ein Rohr kreisförmigen Querschnittes. Durch Veränderung von Blendendurchmesser und Blendenabstand waren mannigfaltige rauhe Rohre leicht herstellbar. Für diese sollten der Widerstand und teilweise auch die Geschwindigkeitsverteilung ermittelt werden. Weiterhin sollte der geschilderte Aufbau einer rauhen Wand dazu benutzt werden, genau ähnliche rauhe Wände verschiedener Größe (ähnlich nach Form und Anordnung) herzustellen und so eine exakte Prüfung des Ähnlichkeitsgesetzes zu ermöglichen.

Die Durchführung der Versuche liegt bereits längere Zeit zurück. Ihre Zusammenfassung und Verarbeitung wurde durch äußere Umstände erheblich verzögert. Seit Durchführung unserer Messungen, die im Jahre 1933 abgeschlossen wurden, ist, wie aus dem vorigen Abschnitt ersichtlich, eine Reihe wichtiger Arbeiten zur Frage der rauhen Rohre entstanden. Es ist jedoch keine unter den experimentellen Arbeiten, die sich mit unseren Messungen deckt, so daß diese trotz der Verzögerung noch einen neuen Beitrag liefert. Seit dem Beginn unserer Versuche ist auch die theoretische Behandlung der rauhen Strömung, insbesondere durch

Prandtl, außerordentlich gefördert worden. Es lag daher nahe, unsere Versuchsergebnisse auch von dem Standpunkt dieser Theorie aus zu ordnen und zu prüfen.

II. Versuchsanlage

1. Beschreibung der hydraulischen Anlage

Sämtliche Versuche wurden an der hydraulischen Anlage im Physikalischen Institut der Universität Leipzig, Abteilung für angewandte Mechanik und Thermodynamik, durchgeführt. Diese Versuchseinrichtung wurde nach Angaben von R. Hermann [1] gebaut, der bei seiner Arbeit vielseitige Erfahrungen sammelte, die auch vorliegender Arbeit zugute kamen.

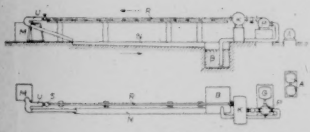

Fig. 1. Grund- und Aufriß der Versuchsanlage.

Wie aus Fig. 1 ersichtlich, arbeitet die Anlage mit Zirkulationsbetrieb. Das Versuchswasser wird aus dem unterirdischen Vorratsbehälter B (Inhalt 8 m³) durch die Kreiselpumpe P (63,5 PS, 5 m³/min bei 4 m Wassersäule) angesaugt und in den Kessel K von 2 m Länge und 1 m Durchmesser gedrückt. Der Kessel dient in der Hauptsache zur Beruhigung des Betriebswassers. Durch einen Hahn auf dem Deckel des Mannloches kann die Luft, die sich während des Ruhens der Anlage angesammelt hat, herausgedrückt werden. Das Versuchsrohr ragt durch einen Flansch ein Stück frei in den Kessel hinein. Zur Abdichtung Kessel-Rohr wird eine elastische Gummimembran benutzt. Dadurch wird verhindert, daß die unvermeidlichen Schwingungen, die beim Laufen der Pumpe entstehen, auf das Versuchsrohr übertragen werden. Um am Rohreinlauf bei hohen Geschwindigkeiten Kavitation zu vermeiden, wird im allgemeinen mit einem aus Messing gedrückten, trompetenförmigen Mundstück gearbeitet. Alle Rohre werden auf den bei Hermann [1] angegebenen, von Burbach konstruierten Justierlagern befestigt. Durch einen am Ende des Versuchsrohres angebrachten Schieber S wird erreicht, daß auch bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten keine Luft von hinten in das Rohr hineinschlägt. Außerdem lassen sich besonders die kleinen Geschwindigkeiten mit Hilfe dieses Schiebers leicht verändern. Für größere Veränderungen dient ein Zu- und Gegenschaltaggregat A der AEG., das die Tourenzahl der Pumpe von 50 bis 1400 U/min ändern läßt.

Der frei aus dem Rohre austretende Strahl kann zur Geschwindigkeitsbestimmung durch die Schwenkvorrichtung U in den Meßtrog M und nach dieser Messung wieder in die Rücklaufrinne N geleitet werden, in der das Wasser zu dem Vorratsbehälter B zurückfließt. Der auf Volumen geeichte Meßtrog M dient zur Messung der mittleren Geschwindigkeit. Ein Schwimmer zeigt die Höhe des Wasserspiegels vor und nach der Füllung an.

2. Beschreibung der rauhen Rohre

Um die Rauhigkeiten in ihren Abmessungen leicht ändern und nachprüfen zu können (dies war besonders wichtig bei der Herstellung der geometrisch ähnlichen Rohre), wurden die rauhen Rohre durch Aneinanderreihen von Staurändern hergestellt, die durch Zwischenstücke weiteren Durchmessers in bestimmten Abständen gehalten wurden. Die einzelnen Teile wurden dann in ein Mantelrohr geschoben. Es war jedoch nötig, die Stellen zu kennen, an denen die Rauhigkeitselemente saßen. Beim Stopfen der Rohre wurde deshalb mit Hilfe einer Lehre, die im Innern auf den Elementen aufsaß, deren Lage außen auf dem Mantelrohr angerissen. Um ein Verschieben der Stauränder im Innern des Mantelrohres durch den Druck des strömenden Wassers zu verhindern, wurde in jedem Meßquerschnitt in einem Bohrloch ein durchbohrter Nippel eingelötet, der noch bis in die glatten Zwischenteile, aber nicht in die Strömung hineinragte. Die einzelnen Rohre (1–2 m lang) wurden wie bei R. Hermann durch Muffen aneinandergelötet.

III. Meßmethoden

1. Bestimmung der Rohrhalbmesser

Die Kalibrierung der glatten Rohre geschah in derselben Weise wie bei R. Hermann [1] durch Wägung der einmal mit Luft und das andere Mal mit Wasser gefüllten Rohre. Für die rauhen Rohre war diese Art der Durchmesserbestimmung nicht angängig, da sich bei der Wasserfüllung Luftblasen an den Rauhigkeitselementen ansetzt und so die Bestimmung gefälscht hätten. Da der Rohrhalbmesser bei der Berechnung des Widerstandsbeiwertes mit der fünften Potenz eingeht (siehe IV, b, 1), mußte seine Bestimmung besonders sorgfältig vorgenommen werden. Es wurde deshalb folgendermaßen verfahren. Die Längen der einzelnen

Tabelle I. Abmessungen der rauhen Rohre (Angaben in cm)

Bezeichnung der Rohre	r_1	r_2	$k = r_2 - r_1$	L_1	L_2	$\bar{r}$	$k/\bar{r}$	L_2/k
I_A	2,2498	2,4999	0,2501	0,25	2,25	2,4760	0,1010	9,0
I_B	2,2498	2,4999	0,2501	0,25	4,50	2,4873	0,1006	18,0
I_C	2,2498	2,4999	0,2501	0,25	9,00	2,4934	0,1003	36,0
I_D	2,3510	2,4999	0,1489	0,25	4,50	2,4894	0,0599	30,1
I_E	1,9508	2,4999	0,5491	0,25	4,50	2,4740	0,2219	8,2
I_F	2,4257	2,4999	0,0742	0,25	4,50	2,4961	0,0297	60,8
I_G	2,1519	2,4994	0,3475	0,35	9,90	2,4884	0,1396	28,5
I_H	2,3489	2,4988	0,1499	0,15	2,70	2,4916	0,0602	18,0
I_J	2,4261	2,4988	0,0727	0,075	1,35	2,4950	0,0291	18,6
I_K	2,4001	2,4983	0,0982	0,10	1,80	2,4932	0,0394	18,3
II_A	4,5009	4,9994	0,4985	0,50	4,50	4,9518	0,1007	9,0
II_B	4,5009	4,9994	0,4985	0,50	9,00	4,9742	0,1002	18,0

Blenden und Zwischenstücke wurden mit einer Mikrometerschraube (1 Teilstrich = 0,01 mm) als Mittelwert aus je vier Ablesungen, die Durchmesser, deren Differenz (Staurand-Zwischenstück) die Höhe der Rauhigkeiten ergab, auf einem Zeißschen Komparator bestimmt, der noch die Tausendstel mm abzulesen gestattete. Um etwaige unrunde Ringe herauszufinden, wurde jeder in zwei zueinander senkrechten Durchmessern ausgemessen. Ringe mit mehr als 0,04 mm Abweichung von dem geforderten Durchmesser wurden ausgesondert[1]). Der mittlere Halbmesser $\bar{r}$ der rauhen Rohre wurde nach folgender Gleichung berechnet:

$$\bar{r}^2 = \frac{r_1^2 L_1 + r_2^2 L_2}{L_1 + L_2}.$$

Dabei ist r_1 der innere Radius des Rauhigkeitselementes, L_1 dessen Dicke, r_2 der innere Radius des Zwischenstückes, L_2 dessen Länge. Diese Mittelung entspricht einer Kalibrierung mit einer Flüssigkeit, setzt also das reine Durchlaßvolumen in Rechnung. Wegen der großen Anzahl der Blenden und Zwischenstücke, die für ein Rohr verwendet wurden, waren zur Bestimmung des mittleren Halbmessers etwa 1500 Einzelmessungen erforderlich. Eine Zusammenstellung der gemessenen rauhen Rohre gibt Fig. 2 und Tabelle I. Dabei sind die Rohre mit $\bar{r} \sim 2{,}5$ cm mit I und die mit $\bar{r} \sim 5{,}0$ cm mit II bezeichnet. Ferner bedeutet k die absolute Rauhigkeit ($k = r_2 - r_1$), $k/\bar{r}$ die relative Rauhigkeit.

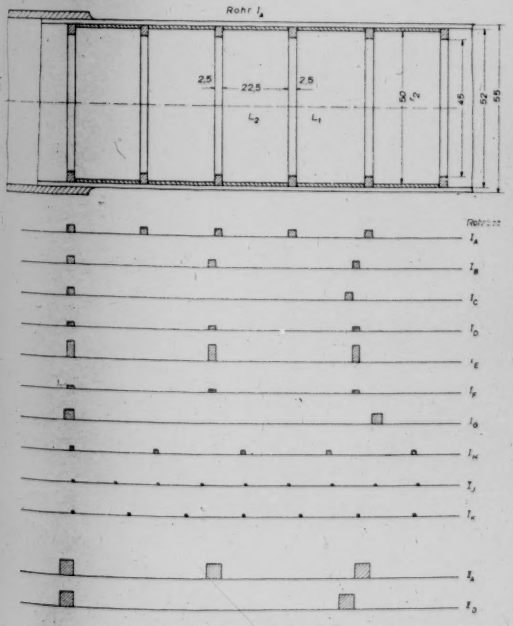

Fig. 2. Übersicht über die gemessenen rauhen Rohre.

[1]) Die Einzelteile lieferte die Firma E. Zimmermann, Wissenschaftliche Apparate, Leipzig O 27, Wasserturmstraße 33, mit der von uns gewünschten Genauigkeit von 0,04 mm zu unserer größten Zufriedenheit.

2. Zähigkeitsbestimmung

Die Temperatur des Versuchswassers wurde mit einem 0,1°-Thermometer gemessen (0,1° Temperaturfehler bedeutet 0,38 Proz. Fehler in ν und damit auch in Re), das in einem Kesselflansch eingebaut war. Die μ-Werte bzw. ν-Werte wurden aus den Tafeln von Landoldt-Börnstein entnommen.

3. Messung der mittleren Geschwindigkeit

Die mittlere Geschwindigkeit $\overline{u}$ berechnet sich aus der Gleichung

$$\overline{u} = \frac{Q}{t \cdot \overline{r}^2 \pi}$$

Q ist das in der Zeit t durch das Rohr mit dem Halbmesser $\overline{r}$ geströmte Wasservolumen. Die Bestimmung von $\overline{u}$ teilt sich also in:

a) Mengenmessung. Diese erfolgte in dem Meßtrog M mit Hilfe zweier Schwimmerablesungen. Der Trog wurde zweimal auf Volumen geeicht. Sein mittlerer Querschnitt ergab sich zu 17023 cm².

b) Zeitmessung. Die Zeitmessung wurde gegenüber der von R. Hermann noch durch eine elektrische Stoppuhrauslösung verbessert, die beim Durchgang der mittleren Schottenwand der Schwenkvorrichtung durch den Wasserstrahl über ein Relais die Stoppuhr betätigte. Es wurden Ankra-Uhren benutzt, die noch die 0,01 Sekunden anzeigten. Diese Stoppuhren wurden von Zeit zu Zeit mit der Normaluhr des Physikalischen Instituts verglichen.

4. Druckabfallmessung

Um Druckfälschungen zu vermeiden, mußte besonders auf gleiche geometrische Form der Druckabnahmelöcher geachtet werden. Um dies zu erreichen und gleichzeitig Bohrgrate zu entfernen, wurden alle Löcher nach der von R. Hermann [1] angegebenen Art gleichmäßig gefräst. In jedem Meßquerschnitt wurden vier Bohrungen mit 3 mm Durchmesser in einer zur Rohrachse senkrechten Ebene, um 90° gegeneinander versetzt, angebracht und gemeinsam zu einem Manometerschenkel geführt. Zwei zusammengehörige Meßquerschnitte mußten bei den rauhen Rohren dieselbe Entfernung von den Rauhigkeitselementen haben, da sonst Unstimmigkeiten in der Druckanzeige aufgetreten wären. Um die Größe des Fehlers abschätzen zu können, der bei unsymmetrisch zu den Rauhigkeitselementen liegenden Meßquerschnitten auftreten kann, wurden beim Rohr I_A zwischen zwei Rauhigkeitselementen in fünf verschiedenen Querschnitten je zwei Bohrungen angebracht (vgl. Fig. 3). Es wurden die Druckabnahmestellen a, b, c, d gegen m geschaltet und die sich ergebenden Abweichungen in Fig. 3 eingezeichnet. Dabei zeigte sich, daß 1 mm Abweichung von der Mitte m bereits einen Fehler von 1 Proz. in ψ ergibt.

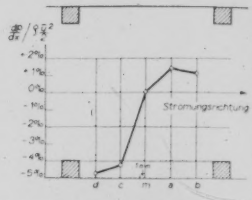

Fig. 3. Druckabnahmemessungen zwischen zwei Rauhigkeitselementen.

Vor der eigentlichen Druckabfallmessung wurden die Druckanzeigen der vier Bohrungen jedes Querschnittes an einem Manometer gegenseitig verglichen und bei auftretenden größeren Ausschlägen die Bohrungen noch einmal gefräst. Als Manometer wurden für den Druckabfall wie auch für die Geschwindigkeitsverteilung umgekehrte U-Rohre benutzt, die für die kleinsten auftretenden Drucke mit Petroleum überschichtet, für die mittleren nur mit Wasser gefüllt waren. Für das Rohr II_B wurde versuchsweise Triazetin verwendet, das zwar schöne Menisken zeigte, aber infolge der starken Temperaturabhängigkeit seiner Dichte (2° Temperaturdifferenz bedeutet 1 Proz. Änderung der Druckhöhe) ungeeignet war, da sich die wahre Temperatur im Manometer nur ungenau bestimmen ließ. Bei den größten Drucken wurden aufrechtstehende U-Rohre mit Quecksilberfüllung benutzt.

5. Messung der Geschwindigkeitsverteilung

Zur Geschwindigkeitsverteilungsmessung (im folgenden Gv.-Messung genannt) wurde die in Fig. 4 und 5 gezeigte Meßeinrichtung benutzt. An dem Doppel-T-Träger D war auf einer starken Eisenplatte ein Support S aufgeschraubt, dessen Spindel eine Ganghöhe von 3 mm hatte (Teilstrichabstand auf der Trommel T entspricht einem Vorschub der Sonde von 0,05 mm; die Hundertstel Millimeter konnten noch sehr leicht geschätzt werden). Um Meßfehler durch den toten Gang der Spindel zu vermeiden, wurde bei den Messungen streng darauf geachtet, daß alle Einstellungen am Support nur von einer Seite kommend erfolgten. Als Meßsonden wurden

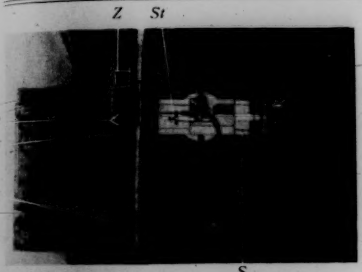

Fig. 4. Aufsicht auf die Einrichtung zur Gv.-Messung.

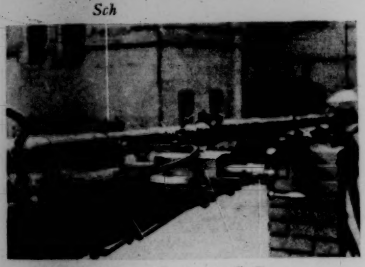

Fig. 5. Seitenansicht der Einrichtung zur Gv.-Messung.

Pitotrohre benutzt, die aus nichtrostenden Kanülen bestanden (Abmessungen siehe Fig. 6). Diese waren in eine stromlinienförmig gefeilte Strebe *St* eingelötet. Bei runden Streben traten schon bei mittleren Geschwindigkeiten starke Schwingungen auf, wodurch die Messungen ungenau wurden.

Die Durchführung durch das Versuchsrohr wurde sorgfältig gebohrt, damit die Messung in einem Rohrdurchmesser und nicht in einer Sehne stattfand. Vor Beginn jeder Meßreihe wurde das Pitotrohr bei einer Stellung in der Mitte des Versuchsrohres um einen kleinen Winkel geneigt und das Manometer abgelesen. Beim Höchststand lag dann die Meßsonde in der Strömungsrichtung. Diese Stellung konnte mit Hilfe der Haltevorrichtung *H* (vgl. Fig. 4), bestehend aus einer Lehre, in der sich die stromlinienförmige Strebe zügig verschieben ließ, durch Anziehen der Flügelschraube *F* während einer Gv.-Messung festgehalten werden. Dadurch wurden zwei Fehler ausgeschaltet. Durch eine Schrägstellung der Sonde zur Strömungsrichtung wäre nur eine Komponente der Geschwindigkeit gemessen worden. Ferner hätte die Schrägstellung zu einer Messung in einer Rohrsehne geführt, selbst wenn die Strebe richtig im Durchmesser lag.

Das Festlegen einer ausgezeichneten Pitotrohrstellung (Rohrwand oder -mitte) auf dem Support konnte nach zwei Methoden erfolgen. Aus der über den gesamten Durchmesser gemessenen Geschwindigkeit konnte die Rohrmitte als Symmetriepunkt der Geschwindigkeitsverteilung bestimmt werden. Im allgemeinen wurde die Rohrmitte mit der zweiten, aus Fig. 6 ersichtlichen Methode festgelegt. Es wurde ein Z-Stück mit der Höhe *b* gefeilt und der Abstand Kanülenmitte-Strebenende *a* vor dem Einbau genau ausgemessen. Das Z-Stück wurde dann vor jeder Gv.-Messung an die äußere Rohrwand angelegt und dadurch der Wandabstand *y* der Meßsonde bestimmt.

Die benutzten Pitotrohre zeigten den Gesamtdruck an. Um den Staudruck und damit die Geschwindigkeit zu bekommen, wurde der statische Druck durch Druckabnahmestellen an der Rohrwand gegen den Gesamtdruck geschaltet. Die Schelle *Sch* (vgl. Fig. 5 und 6), die zur Abdichtung diente, verhinderte die Entnahme des statischen Druckes im Querschnitt der Gesamtdruckmessung. Er wurde deshalb in einem stromaufwärts liegenden Querschnitt *M* (vgl. Fig. 4) entnommen. Der Druckabfall von der Stelle *M* bis zur Stelle der Gesamtdruckmessung wurde als Korrektur in Rechnung gesetzt. Außerdem wurde die Konstanz der mittleren Geschwindigkeit während einer Meßreihe an einem Kontrollmanometer beobachtet.

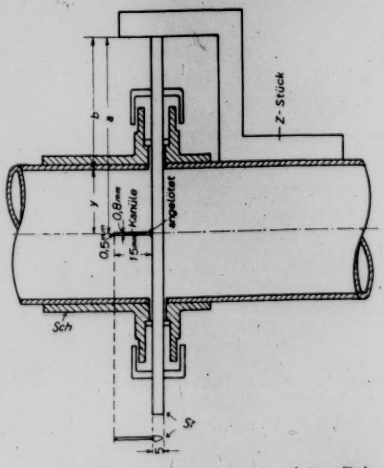

Fig. 6. Pitotrohr zur Gv.-Messung im glatten Rohr eingebaut mit angelegtem *Z*-Stück zur Festlegung des Wandabstandes.

Bei Reynoldsschen Zahlen $Re_{Fr} = \frac{a\,u}{\nu} = 100$ (dabei ist a der äußere Halbmesser des Pitotrohres in unserem Falle 0,08 cm) tritt eine Fehlanzeige des Pitotrohres auf. Dieser Effekt wurde zuerst von M. Barker [21] beobachtet und von F. Homann [22] bestätigt. Die kleinsten Re_{Fr} der vorliegenden Arbeit liegen jedoch bei 220, also außerhalb des Fehlergebietes.

IV. Ergebnisse

a) Vorversuche

1. Der Anlaufeffekt bei rauhen Rohren

Da die Messungen des Widerstandsbeiwertes und der Geschwindigkeitsverteilung an Stellen vorgenommen werden mußten, an denen sich der endgültige Widerstand bzw. das ausgebildete Profil eingestellt hatte, wurde bei den Rohren I_A, I_B, und II_A der Anlaufeffekt gemessen, der sich als Differenz $\Delta\psi$ der Widerstandsbeiwerte für Meßstellen verschiedener Anlauflängen ergibt. Diese wurde gekennzeichnet durch die Entfernung der Mitte der Meßstrecke vom Anfang der rauhen Rohre + der halben Meßstreckenlänge. Vor den rauhen Rohren I_A und I_B ($d = 5$ cm) befand sich ein glattes Rohr von etwa 10 m Länge und 5 cm Durchmesser, vor dem Rohre II_A ($d = 10$ cm) ein 8 m langes glattes Rohr mit 0,8 cm Durchmesser. Rauhes und glattes Rohr waren hier durch eine konische Erweiterung (Winkel der Mantellinien gegen die Rohrachse betrug 9°) miteinander verbunden.

Die in Tabelle II wiedergegebenen Meßergebnisse zeigten keine Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl, die zwischen $10 \cdot 10^3$ und $300 \cdot 10^3$ verändert wurde. Wie aus Tabelle VI und Fig. 7 ersichtlich ist, ist bei den vorliegenden rauhen Rohren die Umgestaltung von der glatten in die ausgebildete rauhe Strömungsform nach etwa 50 bis 60 Halbmessern beendet, da bei einer Anlauflänge von 60 r nur noch Abweichungen kleiner also 0,5 Proz. auftreten. Dies steht im Einklang zu den Messungen von J. Nikuradse [10], der für Sandrohre eine Anlauflänge von 80 r fand.

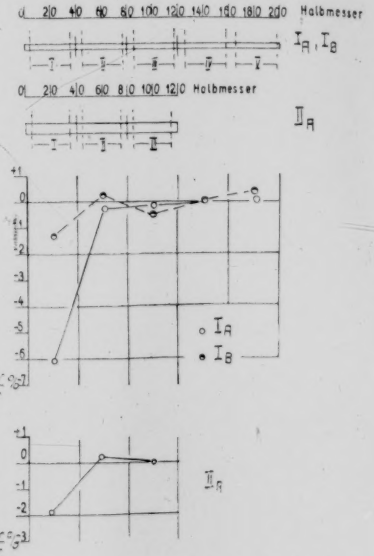

Fig. 7. Der Anlaufeffekt bei rauhen Rohren.

2. Genauigkeit der Druckabfallmessung

In jedem Meßquerschnitt waren vier geometrisch gleiche Druckabnahmebohrungen angebracht. Für das Rohr I_A wurden bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen in je zwei Querschnitten die mittleren Fehler der Druck-

Tabelle II. Anlaufeffekt bei rauhen Rohren

Anlauflänge	28,7 ± 10,2	91,1 ± 10,2	101,5 ± 10,1	141,9 ± 16,2	182,3 ± 16,2
Rohr	$\Delta\psi/\psi$ in %				
I_A	0,1	0,3	−0,2	0,0	0,0
I_B	1,3	0,2	−0,5	0,0	0,4
Anlauflänge	10,5 ± 15,0	30,5 ± 15,0	100,5 ± 15,0		
Rohr	$\Delta\psi/\psi$ in %				
II_A	1,0	0,2	0,0		

Hierbei sind die Anlauflängen durch den Rohrhalbmesser dimensionslos gemacht.

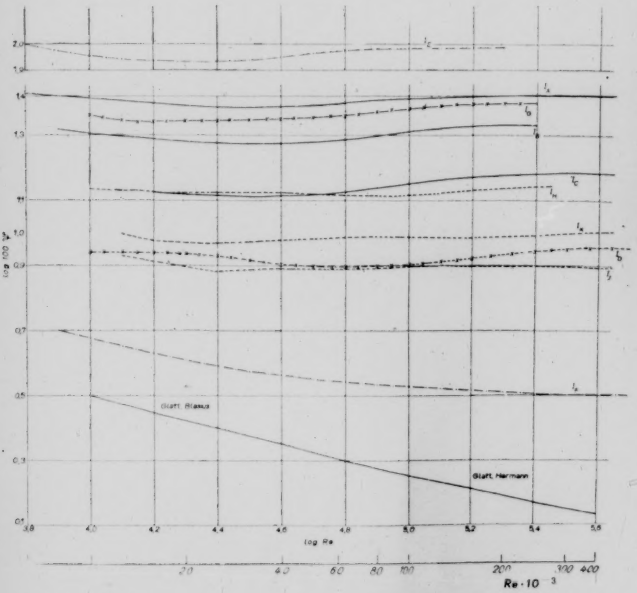

Fig. 8. Widerstandskurven der rauhen Rohre.

anzeige M_1, M_2 für fünf Meßstrecken dadurch bestimmt, daß die Abweichung δ der Druckanzeige des Einzelloches gegen den gemeinsamen Mittelwert festgestellt wurde. Der „mittlere Fehler des Resultats" wurde dann nach der Theorie der Beobachtungsfehler aus folgender Gleichung berechnet:

$$M = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{n\,(n-1)}}\,.$$

In diesem Falle ist $n = 4$. Der mittlere Fehler einer Meßstrecke ergibt sich als Summe der M_1 und M_2 der beiden Querschnitte. Diese Werte in Promille sind in Tabelle III zusammengestellt. Sie zeigen keinen systematischen Gang mit den Reynoldsschen Zahlen und haben etwa eine Größe von 3 Promille.

Tabelle III

Mittlerer Fehler der Druckabfallbestimmung in Promille, gemessen am Rohr I_1

$Re\ 10^{-3}$	Meßstrecke				
	I	II	III	IV	V
92	2,0	1,0	1,1	3,1	2,0
159	1,9	2,2	1,7	2,7	3,1
225	1,5	2,1	2,1	2,8	3,9
276	2,1	2,3	1,5	3,3	3,9

b) Hauptversuche

1. Der Widerstand des Kreisrohres mit Staurändern als Rauhigkeitselementen

Es wurde der Widerstandsbeiwert von zehn rauhen Rohren I_A bis I_K in einem Gebiet Reynoldsscher Zahlen von $7 \cdot 10^3$ bis $450 \cdot 10^3$ gemessen. Die Abmessungen und Anordnungen der Stauränder ersieht man aus Tabelle I und Fig. 2.

Der dimensionslose Widerstandsbeiwert ψ errechnet sich wie folgt aus den einzelnen Ablesungen:

$$\psi = \frac{\Delta p\, 2d}{l \varrho_{H_2O}\, \bar{u}^2}\,, \tag{1}$$

wobei

$$\bar{u} = \frac{Q}{l \bar{r}^2 \pi}\,, \tag{2}$$

$$\Delta p = \varrho_{man} \Delta h g\,, \tag{3}$$

$$Q = f \Delta S\,, \tag{4}$$

mit Gleichung (2), (3) und (4) wird (1)

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{4\pi^2 g \bar{r}^5 \varrho_{man}}{l f^2 \varrho_{H_2O}} \cdot \left(\frac{t}{\Delta S}\right)^2 \Delta \\ &= A \frac{\varrho_{man}}{\varrho_{H_2O}} \left(\frac{t}{\Delta S}\right)^2 \Delta h\,. \end{aligned}\right| \tag{5}$$

Tabelle

Bezeichnung der Rohre	I_A	II_A	I_B	II_B	I_C	I_D	I_E	I_F	I_G	I_H	I_I	I_K
log *Re*	log 1000 ψ											
3,80	2,425						2,977					
3,85	422	2,428					968	1,713				
3,90	419	422	2,319				959	701				
3,95	416	417	312	2,324			951	689				
4,00	413	412	306	317		1,941	944	677	2,301	2,137		
4,05	410	407	300	309	2,127	941	938	665	353	134		
4,10	407	403	296	301	133	941	934	653	346	131	1,929	1,983
4,15	403	399	292	293	129	944	931	641	341	128	921	980
4,20	398	396	288	287	125	947	928	629	342	126	913	977
4,25	393	394	284	283	121	939	926	618	343	125	905	976
4,30	390	393	280	279	118	937	927	608	344	125	897	971
4,35	388	392	278	276	116	935	928	600	345	126	889	968
4,40	387	392	276	274	115	931	930	592	346	127	881	970
4,45	386	392	274	273	114	925	932	585	347	127	883	972
4,50	386	392	273	273	113	918	935	578	348	126	885	974
4,55	386	393	274	274	112	910	940	570	349	125	887	976
4,60	387	393	274	275	113	903	945	561	350	123	889	978
4,65	388	394	275	277	114	897	950	551	352	120	889	980
4,70	391	397	277	279	117	897	954	540	354	118	889	982
4,75	395	399	281	282	121	897	957	539	357	116	889	984
4,80	399	401	286	286	126	897	959	538	361	115	890	986
4,85	402	404	290	291	132	897	961	537	365	114	891	988
4,90	405	407	296	297	138	897	963	536	370	114	892	989
4,95	409	410	303	304	144	898	965	534	375	115	894	988
5,00	412	413	309	311	150	901	966	531	380	116	896	988
5,05	413	416	316	317	158	905	967	528	385	118	898	987
5,10	415	419	320	322	163	909	968	525	389	121	900	986
5,15	417	423	324	326	168	914	969	522	392	125	899	985
5,20	418	427	326	329	172	920	970	519	394	129	898	986
5,25	419	430	328	331	175	926	971	516	396	133	898	987
5,30	420	432	330	333	178	932	971	512	397	136	897	990
5,35	421	433	332	334	180	938		508	398	139	896	990
5,40	423	433	332	335	181	943		505	399	141	895	993
5,45	423	433	334	336	182	947		503		143	894	995
5,50	423	433		337	183	950		501			894	998
5,55	423			338	184	953		500			893	2,001
5,60	423			338	184	956		500			893	004
5,65	423				184	957		500			894	006

Ferner gilt:

$$Re = \frac{\bar{u}d}{\nu} = \frac{Q \cdot 2\bar{r}}{t\pi\bar{r}^2\nu} = \frac{2f}{\pi\bar{r}} \cdot \frac{\Delta S}{t\nu} = B \cdot \frac{\Delta S}{t\nu} \quad (6)$$

Dabei ist Δp der Druckabfall längs der Meßstrecke l in dyn/cm², $\frac{\varrho_{H_2O}\bar{u}^2}{2}$ der Staudruck, $\bar{u}$ die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, Q das Durchflußvolumen in der Zeit t, ϱ_{man} die Dichte der Manometerflüssigkeit, ϱ_{H_2O} die des durchströmenden Wassers. ΔS ist die Differenz der Schwimmerstände im Meßtrog vor Beginn und nach dem Ende der Geschwindigkeitsmessung, f der mittlere Troqquerschnitt.

Die Faktoren A und B in den Formeln (5) und (6) sind für jedes Rohr konstant, so daß sich ψ und Re durch entsprechende Multiplikation mit den Meßgrößen ΔS, t und Δh berechnet.

Für jedes Rohr wurden etwa 150 Einzelwerte ψ, Re bestimmt. In Fig. 8 sind die Mittelkurven der Rohre I_A bis I_K doppeltlogarithmisch (log ψ, log Re) aufgetragen. Diese Mittelwerte (vgl. Tabelle IV) wurden durch Mittelung der Einzelwerte (15 bis 20) in je einem Intervall von log $Re = 0{,}1$ erhalten. Die Streuung der Einzelwerte, etwa $\pm 0{,}5$ Proz., ersieht man auch aus Fig. 9, in der jedoch der Übersichtlichkeit wegen nur ein Drittel der gemessenen Werte eingetragen wurde. Die Messungen wurden sämtlich bei fertig ausgebildeter Strömung, d. h. mit einer Anlauflänge größer als 60 Halbmesser, ausgeführt.

	I_A	II_A^*	I_B	II_B	I_C	I_D	I_E	I_F	I_G	I_H	I_J	I_K
$\cdot 10^{-3}$						1000 ψ						
6.31	266						948					
7.08	264	268					929	51.6				
7.94	263	264	208				910	50.2				
8.91	261	261	205	211		87.3	893	48.9				
10.0	259	258	202	208		87.3	879	47.5	229	137		
11.2	257	258	200	204	137	87.3	867	46.2	225	136		
12.6	255	253	198	200	136	87.3	859	45.0	222	135	84.9	96.2
14.1	253	251	196	196	135	87.9	853	43.8	219	134	83.3	95.5
15.9	250	249	194	194	133	88.5	847	42.6	200	133	81.8	94.8
17.8	247	248	192	192	132	86.9	843	41.5	220	133	80.4	94.2
20.0	246	247	191	190	131	86.5	845	40.6	221	133	78.9	93.5
22.4	245	247	190	189	131	86.1	847	39.8	221	134	77.5	92.9
25.1	244	247	189	188	131	85.3	851	39.1	222	134	76.0	93.3
28.2	243	247	188	188	130	84.1	855	38.5	222	134	76.4	93.8
31.6	243	247	188	188	130	82.8	861	37.9	223	133	76.7	94.2
35.5	243	247	188	188	129	81.3	871	37.2	223	133	77.1	94.6
39.8	244	247	188	188	130	80.0	881	36.4	224	132	77.4	95.1
44.7	245	248	188	189	130	78.9	891	35.6	225	132	77.4	95.5
50.1	246	250	189	190	131	78.9	899	34.7	226	131	77.4	95.9
56.2	248	251	191	191	132	78.9	906	34.6	228	131	77.5	96.4
63.2	251	252	193	193	134	78.9	910	34.5	230	130	77.6	96.8
70.8	252	254	195	195	136	78.9	914	34.4	232	130	77.8	97.3
79.4	254	255	198	198	137	78.9	918	34.4	234	130	78.0	97.5
89.1	256	257	201	201	139	79.1	923	34.2	237	130	78.4	97.3
100	258	259	204	205	141	79.7	925	34.0	240	131	78.7	97.3
112	259	261	207	207	144	80.4	927	33.7	243	131	79.1	97.1
126	260	263	209	210	146	81.1	929	33.5	245	132	79.4	96.8
141	261	265	211	212	147	82.0	931	33.3	247	133	79.3	96.6
159	262	267	212	213	149	83.2	934	33.1	248	135	79.3	96.8
178	263	269	213	214	150	84.3	935	32.8	249	136	79.3	97.1
200	263	270	214	215	151	85.5	935	32.5	250	137	78.9	97.3
224	264	271	215	216	151	86.7		32.2	250	138	78.7	97.7
251	265	271	215	216	152	87.7		32.0	251	138	78.5	98.4
282	265	271	216	217	152	88.5		31.9		139	78.4	98.9
316	265	271		217	153	89.1		31.7			78.4	99.5
355	265			218	153	89.8		31.6			78.2	100
398	265			218	153	90.4		31.6			78.2	101
447	265				153	90.6		31.6			78.4	101

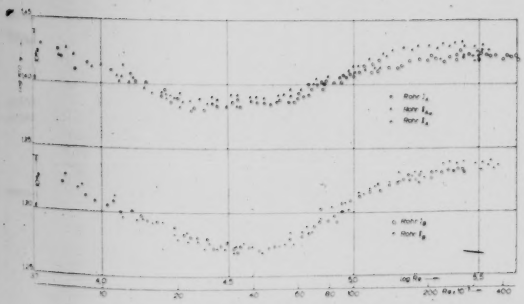

Fig. 9. Messungen zum Ähnlichkeitsgesetz der rauhen Rohre.

Der Widerstandsbeiwert ψ ist eine Funktion der drei dimensionslosen Zahlen:

1. Der Reynoldsschen Zahl Re.
2. Der relativen Rauhigkeit k/r.
3. Dem mit der Rauhigkeitshöhe dimensionslos gemachten Abstand der Rauhigkeitselemente L_2/k.

Um den Einfluß der drei Größen kennenzulernen, wurden jeweils zwei konstant gehalten und die dritte verändert (vgl. IV, 3, 6, 7). Zunächst sollen aber die Versuche zum Ähnlichkeitsgesetz der rauhen Rohre beschrieben werden.

2. Unmittelbarer Nachweis des Ähnlichkeitsgesetzes für rauhe Rohre

Das von O. Reynolds 23 erkannte und für glatte Rohre nachgewiesene Ähnlichkeitsgesetz besagt folgendes: Zwei Strömungen sind bei geometrisch ähnlicher Berandung dann einander ähnlich, haben also auch denselben Widerstandsbeiwert, wenn die dimensionslosen Ausdrücke $wd\nu$ für die beiden Strömungen denselben Zahlenwert besitzen.

Die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes für rauhe Rohre wurde schon 1911 von Stanton und Pannell 8 an Gewinderohren durch Vergleich der Geschwindigkeitsprofile nachgeprüft. Einem entsprechender Versuch wurde erstmalig von L. Schiller 9 mit Widerstandsmessungen durchgeführt. Da diese Versuche wegen der Schwierigkeit, völlig ähnliche Gewinde herzustellen, ergänzungsbedürftig erschienen, wurden hier Versuche durchgeführt, bei denen jedes Rauhigkeitselement auf seine Abmessungen nachgeprüft werden konnte.

Um einen einwandfreien Nachweis für die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes zu erbringen, wurden sämtliche Abmessungen ($\bar{r}$, k, l_1, l_2) der rauhen Rohre I_1 und I_E verdoppelt. Diese Rohre wurden mit II_1^* und II_E^* bezeichnet. Es gelang, die Höhe k der Rauhigkeitselemente bis auf 0,34 Proz. genau herzustellen, wie man aus den k-Werten der beiden Rohre ersieht: $2 \cdot k_1 = 2 \cdot 0{,}2501$ cm $= 0{,}5002$ cm, $k_{II} = 0{,}4985$ cm. Die mittleren Halbmesser stimmten noch besser überein, nämlich $2 \cdot \bar{r}(I_1) = 2 \times 2{,}476 = 4{,}952$, $\bar{r}(II_1) = 4{,}952$; $2 \cdot \bar{r}(I_E) = 2 \times 2{,}473 = 4{,}9740$, $\bar{r}(II_E^*) = 4{,}9742$. Die I_1 und I_2 konnten genau verdoppelt werden. Trotzdem ergab sich beim Rohr II_1^* bei $Re = 100 \cdot 10^3$ ein um 2 Proz. und bei $Re = 400 \cdot 10^3$ ein um 3 Proz. höherer Widerstand als bei Rohr I_1 (vgl. Fig. 9). Eine genaue Betrachtung der Stauränder unter dem Mikroskop ergab, daß ihre Kanten sowohl bei Rohr I_1 wie bei II_1^* bei der Herstellung in einer Breite von etwa 0,04 mm verbrochen waren. Nachdem auch diese Eigenschaft der Rauhigkeitselemente ähnlich vergrößert wurde (d. h. die Kanten der Stauränder des weiten Rohres, das jetzt mit II_1 bezeichnet wird, wurden um 0,08 mm verbrochen), stimmten die φ-Werte innerhalb der Meßgenauigkeit überein (vgl. Fig. 9). Die Messungen am Rohr II_E wurden nur mit den abgegrateten Staurändern ausgeführt. Sie ergaben von $Re = 6{,}5 \cdot 10^3$ bis etwa $100 \cdot 10^3$ Übereinstimmung mit den Werten des Rohres I_E innerhalb der Meßgenauigkeit; von $Re = 100 \cdot 10^3$ bis $400 \cdot 10^3$ lag II_E im Mittel etwa 2 Proz. höher.

Im ganzen darf man in den vorstehenden Meßergebnissen eine recht gute Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes erblicken dergestalt, daß eine streng ähnliche Veränderung der Rauhigkeiten tatsächlich zu sehr gut übereinstimmenden Widerständen führt.

3. Der Widerstand der rauhen Rohre als Funktion der Reynoldsschen Zahl und kritische Zahlen der Rauhigkeitselemente

Die benutzte Versuchsanlage gestattete Messungen in dem Bereich der Reynoldsschen Zahlen von etwa $7 \cdot 10^3$ bis $400 \cdot 10^3$. Es war also nicht möglich, die bei kleineren Zahlen liegenden Übergänge von laminarer in turbulente Strömung zu beobachten. Der Widerstand ist in dem oben angegebenen Bereich bei den Rohren I_1 bis I_E annähernd quadratisch (vgl. Fig. 8). Nur bei dem Rohr I_E, bei dem die Rauhigkeitselemente geringe Höhe ($k/\bar{r} = 0{,}0267$) und großen Abstand ($l_2/k = 60{,}8$) hatten, läuft der Widerstand bis etwa $Re = 40 \cdot 10^3$ annähernd parallel zu dem des glatten Rohres, um bei höheren Reynoldsschen Zahlen allmählich quadratisch zu werden. Die Widerstandswerte φ liegen für die Rohre I_1 bis I_E in dem Bereich von 0,032 bis 0,04.

Bei allen Rohren treten in den Widerstandskurven (vgl. Fig. 8) bei verschiedenen, mit Rohrdurchmesser und $\bar{u}$ bezogenen Reynoldsschen Zahlen (Re_{krit}) z. B. $14 \cdot 10^3$ für Rohr I_1 bis $320 \cdot 10^3$ für Rohr I_E) Einsenkungen auf. Die Abweichung vom vollquadratischen Widerstand $\varphi_{\text{krit}} - \varphi_{\text{quadr}}$ beträgt bei einzelnen Rohren bis zu $\frac{\varphi_{\text{krit}} - \varphi_{\text{quadr}}}{\varphi_{\text{quadr}}}$ 15 Proz. Eine kleinere Senke ($Re_{\text{krit}(1)}$), die sich oft nur durch eine Richtungsänderung der φ-Re-Kurven bemerkbar machte, trat noch bei den Rohren mit kleinem k auf. Bei den anderen Rohren lag sie außerhalb des Meßbereiches, da sie sich dort nach zu kleinen Reynoldsschen Zahlen (bezogen auf die Rohre) verschiebt.

Es wurde vermutet, daß die Minima durch Änderung der Strömung hinter den Rauhigkeitselementen bedingt sind. Sie müßten also bei gleichen kritischen Reynoldsschen Zahlen Re', bezogen auf die Rauhigkeitselemente, liegen. Dabei setzen wir $Re' = u'k/\nu$, u' die Geschwindigkeit an der Spitze des Rauhigkeitselementes mit der Höhe k. Dabei wurde u' aus dem Geschwindigkeitsprofil des Rohres I_E (Tal. vgl. IV, 5) entnommen. Aus Tab. IIe V ersieht man, daß die erste kritische Zahl etwa bei $Re' = 250$ liegt, die zweite bei $Re' = 1300$. Die Rohre I_E und I_E — diejenigen mit der kleinsten und der größten Rauhigkeitshöhe — haben einen abweichenden Wert von $Re' \sim 2000$, der sich vielleicht aus der

für diese Rohre etwas unsicheren Bestimmung von u' erklärt.

L. Schiller [9] beobachtete an Gewinderohren auch Senken, die, auf das Element bezogen, etwa bei $Re' = 1400$ lagen. Diese und unsere Messungen sind im Einklang mit solchen von R. Lehnert [19] an ebenen, senkrecht angeströmten Platten. Auch dort wurden Senken der Widerstandsbeiwerte c_w beobachtet, die zwischen 1500 und 1750 bei Anstellwinkeln von 0 bis 90° liegen. Es leuchtet ein, daß natürliche Rauhigkeiten und ebenso die von J. Nikuradse [10] gemessenen Sandrauhigkeiten solche Minima nicht ergeben können, da Ungleichheiten in den einzelnen Elementen die kritische Zone erheblich verbreitern werden.

4. Die Geschwindigkeitsverteilung in glatten Rohren bei turbulenter Strömung

Um die Methode der Gv.-Messung auszuprobieren und gleichzeitig mit Resultaten, die J. Nikuradse erhalten hatte, eine Vergleichsmöglichkeit zu schaffen, wurde zunächst die Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Strömung in einem glatten Kupferrohr von 5,0 cm und einem Messingrohr von 10,5 cm Durchmesser (l. W.) gemessen (vgl. Tabelle VII).

Tabelle V. Kritische Zahlen der Rauhigkeitselemente

Rohr	k in cm	$Re_{\text{Min 1}}$ · 1000	$Re_{\text{Min 2}}$ · 1000	u'_1 in cm/s	u'_2 in cm/s	$Re'_{\text{Min 1}}$	$Re'_{\text{Min 2}}$
l_E	0,549	—	14	—	36	—	1950
l_G	0,348	—	18	—	35	—	1230
l_C	0,250	—	35	—	55	—	1380
l_B	0,250	—	32	—	50	—	1260
l_A	0,250	—	32	—	50	—	1260
l_D	0,148	14	71	16,0	84	240	1260
l_H	0,150	10	71	19,0	84	280	1260
l_K	0,0082	22	140	23,6	150	230	1470
l_F	0,0742	28	320	26,8	307	200	2280
l_J	0,0727	28	220	26,8	192	200	1400

Tabelle VII. Glatt $r = 5{,}25$ cm

Temperatur	19,7	20,0	18,8	19,5	19,0	21,8	19,4	21,0
$Re \cdot 10^{-3}$ ...	152	154	210	230	300	340	334	402
$1/n$	7,3	7,3	7,9	8,1	8,1	8,2	8,2	8,4
$\bar{u}/u_{max}$	0,822	0,828	0,840	0,833	0,840	0,844	0,850	0,844
$c_w \cdot \sqrt{\tau_0 \varrho}$ ...	6,04	6,80	9,00	9,68	12,2	13,0	13,3	15,6

y'/r	3[1]	4	1	2	5	8	6	7
	u cm/s							
0,971	103	106	150	164	215	230	236	296
0,914	126	130	178	191	259	274	279	343
0,857	133	140	—	205	273	288	296	365
0,800	147	146	202	210	280	306	308	376
0,743	149	153	—	225	296	314	318	—
0,686	153	157	214	230	307	321	328	399
0,629	158	162	—	238	316	329	333	406
0,571	161	166	223	241	317	335	340	412
0,514	165	169	—	246	321	340	346	420
0,457	167	171	229	249	329	346	350	425
0,400	167	174	—	253	332	348	353	430
0,343	172	176	234	253	338	353	356	436
0,286	172	179	—	257	340	360	364	440
0,229	173	180	238	261	342	361	364	444
0,171	175	182	—	264	346	365	368	445
0,114	175	183	242	266	347	365	370	447
0,057	177	184	—	268	347	367	374	448
0,000	178	185	243	269	348	368	374	449

1) Die Zahlen in den Tabellen VII–X sind die Nummern der Profile der Versuchsprotokolle. Hier sind die Profile nach steigenden Reynoldsschen Zahlen geordnet.

Tabelle VII. I_4 Tal, $k\,\overline{r} = 0{,}101$

Temperatur	13.6	13.4	13.4	13.2	11.9	13.1	12.9	14.5	
$Re \cdot 10^{-3}$ ...	35.5	47.3	64.0	74.7	107	147	183	233	
$1/\varepsilon$	3.19	3.20	3.20	3.19	3.28	3.06	3.18	3.13	mittel 3,19
$\overline{u}/u_{max}$	0,588	0,592	0,590	0,590	0,595	0,592	0,580	0,591	0,591
$\tau_0 = \frac{1}{2}\tau_0 \varrho$ ...	14.6	20.0	27.5	33.5	48.4	94.2	81.3	99.6	

u cm/s

y'/r	8	7	6	4	2	1	3	5	
0,88	77.1	106	141	164	249		403	489	
0,84	84.1	116	153	180	265	339	451	533	
0,78	94.2	128	172	201	295	387	475	597	
0,72	99.8	130	184	215	315	412	524	643	
0,66	108	143	194	229	333	442	557	680	
0,60	112	151	203	238	350	462	585	720	
0,54	117	158	214	249	368	485	611	750	
0,48	122	167	222	259	381	506	638	787	
0,42	126		229	269	397	523	662	811	
0,36	130	175	236	280	407	542	683	843	
0,30	134	179	243	285	418	558	700	856	
0,24	138	184	249	292	428	569	720	886	
0,18	139	187	253	296	435	583	732		
0,12	141	190	257	301	443	590	743	903	
0,06	142	191	258	302	445	595	749	914	
0,00	143	192	259	306	447	597	750	914	

Tabelle VII. I_4 Berg $k\,\overline{r} = 0{,}101$

Temperatur	12.0	12.0	12.4	12.3	12.4	11.7	12.3	13.3	13.8
$Re \cdot 10^{-3}$	28.0	44.7	47.3	63.2	93.5	147	150	190	220
$1/\varepsilon$ bez. 2,50 ..	3.75	3.85	3.85	3.75	3.77	3.75	3.75	3.91	3.95
$\overline{u}/u_{max}$ bez. 2,25 ..	0.731	0.733	0.737	0.748	0.739	0.733	0,729	0,729	0,729
$\overline{u}/u_{max}$ bez. 2,50 ..	0.592	0.594	0.596	0.606	0.598	0.594	0,590	0,590	0,590
$\tau_0 = \frac{1}{2}\tau_0 \varrho$	12.0	19.6	20.4	27.0	27.4	66.8	68,0	83.0	99.4

$r_1 = 2{,}25$ $r_2 = 2{,}50$ u cm/s

y'/r_1	y'/r_2	11	10	9	7	8	1	2	4	6
0,978	0,88	56.3	87.7	86.5	120	129	272	277	387	428
0,934	0,84	66.0	102	100	148	148	347	352	424	497
0,867	0,78	73.0	120	120	163	167	382	384	469	543
0,800	0,72	81.5	129	133	178	180	416	419	518	577
0,734	0,66	86.6	135	142	186	187	450	453	553	638
0,667	0,60	92.6	143	150	196	200	475	477	588	677
0,600	0,54	96.8	150	155	205	207	499	498	612	709
0,533	0,48	101	156	163	213	217	516	518	639	742
0,467	0,42	104	162	166	221	223	530	534	663	704
0,400	0,36	107	168	174	229	230	555	559	687	795
0,334	0,30	110	171	177	235	236	573	570	707	816
0,266	0,24	113	176	183	242	243	585	591	723	840
0,200	0,18	115	179	185	245	245	598	599	739	854
0,133	0,12	116	182	189	249	250	605	611	751	867
0,067	0,06	118	183	189	251	251	612	617	754	874
0,000	0,00	118	185	191	251	254	613	617	758	877

Tabelle VII. I_B Tal. $k/r = 0{,}1006$

Temperatur	19,0	18,7	18,8	17,9	17,8	16,5	17,4	18,6	
$Re \cdot 10^{-3}$ ...	46,3	54,1	82,6	94,7	176	183	224	284	
$1/n$.....	3,16	3,35	3,12	3,13	3,31	3,26	3,22	3,26	Mittel 3,32
$\bar{u}/u_{max}$.....	0,621	0,621	0,615	0,619	0,608	0,607	0,608	0,611	0,614
$v_* = \sqrt{\tau_0/\varrho}$ ...	14,7	17,5	27,4	32,4	62,2	65,2	80,0	99,0	

u cm/s

y'/r	8	6	7	5	3	1	2	4	
0,96	48,9	62,4	96,0	97,0	138	233	228	342	
0,90	61,4	75,7	114	124	275	296	327	426	
0,84	87,2	105	158	179	347	371	440	546	
0,78	99,6	121	183	211	410	438	515	634	
0,72	110	130	200	232	448	471	566	704	
0,66	116	137	210	253	470	498	598	741	
0,60	121	144	219	260	495	521	626	767	
0,54	127	147	230	—	510	544	652	810	
0,48	132	156	238	280	530	564	681	842	
0,42	137	161	248	—	550	585	704	865	
0,36	142	—	256	300	569	601	724	894	
0,30	144	170	262	310	582	619	744	917	
0,24	148	173	268	314	596	634	763	937	
0,18	151	178	273	317	608	645	778	954	
0,12	152	179	276	326	613	654	785	967	
0,06	154	181	278	327	619	658	791	975	
0,00	155	182	280	329	620	661	794	977	

Tabelle VII. II_A Tal. $k/r = 0{,}1007$

Temperatur	13,3	12,0	13,3	15,0	15,0	21,0	
$Re \cdot 10^{-3}$ ...	103	105	116	209	217	270	Mittel
$1/n$.....	3,20	3,20	3,16	3,09	3,36	3,18	3,20
$\bar{u}/u_{max}$.....	0,600	0,596	0,588	0,597	0,591	0,596	0,595
$v_* = \sqrt{\tau_0/\varrho}$ ...	20,0	21,2	25,3	44,3	46,1	49,0	

u cm/s

y'/r	2	1	3	6	4	5	
0,96	78,0	91,8	77,4	160	—	157	
0,90	87,2	115	129	212	—	198	
0,84	94,2	134	134	222	229	232	
0,78	134	149	157	261	266	289	
0,72	144	155	169	291	288	318	
0,66	155	168	178	308	302	343	
0,60	162	176	190	319	318	355	
0,54	169	182	197	329	341	368	
0,48	171	187	205	342	349	385	
0,42	183	193	209	352	362	394	
0,36	185	198	216	365	378	410	
0,30	194	203	224	381	392	425	
0,24	197	213	229	387	399	431	
0,18	202	215	232	392	401	438	
0,12	204	218	235	398	407	445	
0,06	206	219	236	401	412	448	
0,00	207	220	238	402	413	450	

Tabelle VIII. $u\,u_{max}$, glattes Rohr $r = 5{,}25$ cm

3[1]	4	1	2	Mittel 3, 4, 1, 2	5	8	6	Mittel 5, 8, 6	7	y'/r
0,578	0,573	0,618	0,610	0,500	0,618	0,624	0,634	0,625	0,050	0,971
708	703	732	710	0,713	744	744	750	0,740	0,704	0,914
747	750		762	0,755	784	782	796	0,788	0,813	0,857
826	790	832	803	0,813	822	831	828	0,827	0,838	0,800
837	826		830	0,833	850	853	855	0,853	—	0,743
860	848	881	855	0,861	882	872	882	0,879	0,888	0,686
888	876		887	0,884	908	894	896	0,899	0,904	0,629
904	897	918	896	0,905	911	910	914	0,912	0,918	0,571
927	914		914	0,918	922	924	930	0,925	0,930	0,514
938	924	942	926	0,933	946	940	941	0,942	0,947	0,457
938	940		940	0,939	954	946	949	0,950	0,958	0,400
960	951	963	948	0,950	972	959	957	0,963	0,971	0,343
960	968		956	0,963	978	978	979	0,978	0,980	0,286
972	973	980	970	0,975	983	980	979	0,981	0,980	0,229
983	984		982	0,983	994	992	990	0,992	0,992	0,171
983	989	992	980	0,988	994	992	994	0,993	0,996	0,114
994	994		996	0,995	997	997	998	0,997	0,998	0,057
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000

1) Vgl. Fußnote zu Tabelle VII.

Tabelle VIII. $u\,u_{max}$, Rohr I_4 Tal

8	7	6	4	2	1	3	5	Mittel	y'/r
0,539	0,542	0,544	0,540	0,537		0,537	0,537	0,542	0,88
588	604	598	588	593	0,580	601	583	0,591	0,84
650	667	664	657	660	648	633	653	0,656	0,78
698	708	711	703	704	690	669	703	0,702	0,72
755	745	749	738	745	740	742	744	0,745	0,66
783	786	784	778	783	774	780	788	0,782	0,60
818	823	820	814	823	813	814	820	0,819	0,54
853	870	857	840	852	848	850	851	0,853	0,48
882	—	886	870	888	878	884	888	0,883	0,42
909	912	911	913	911	912	910	922	0,913	0,36
938	932	938	932	935	935	933	930	0,935	0,30
965	958	961	954	958	954	960	970	0,960	0,24
972	974	977	968	974	970	970	—	0,974	0,18
986	990	992	984	991	988	991	988	0,989	0,12
993	995	998	987	996	1,007	998	999	0,996	0,06
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,00

Tabelle VIII. $u\,u_{max}$, Rohr I_4 Berg

11	10	9	7	8	1	2	4	6	Mittel	y'/r_1	y'/r_2
0,477	0,447	0,435	0,470	0,508	0,444	0,448	0,510	0,488	0,470	0,978	0,88
559	578	571	590	583	593	579	590	596	0,571	0,934	0,84
618	648	628	649	658	620	622	618	619	0,631	0,867	0,78
660	697	697	709	700	675	679	684	658	0,689	0,800	0,72
734	730	743	741	730	730	734	729	747	0,734	0,734	0,66
785	773	780	781	787	771	774	776	772	0,778	0,667	0,60
820	811	812	817	815	810	807	808	808	0,812	0,600	0,54
856	843	854	849	854	838	840	843	846	0,847	0,533	0,48
881	870	870	881	878	870	866	875	872	0,874	0,467	0,42
907	908	911	913	906	901	906	907	907	0,907	0,400	0,36
932	924	927	937	920	930	924	932	930	0,930	0,334	0,30
957	951	958	962	957	950	954	958	958	0,956	0,266	0,24
974	968	968	976	965	971	971	971	974	0,971	0,200	0,18
983	984	984	982	984	982	990	991	988	0,986	0,133	0,12
1,000	989	990	1,000	988	977	1,000	995	997	0,995	0,067	0,06
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,00

Tabelle VIII. u/u_{max}, Rohr I_B Tal

8	6	7	5	3	1	2	4	Mittel	y'/r
0,317	0,438	0,346	0,295	0,223	0,353	0,387	0,348	0,326	0,56
396	533	497	377	443	448	412	436	0,432	0,90
562	577	564	544	560	561	554	559	0,560	0,84
642	665	654	642	661	662	648	649	0,654	0,78
710	714	714	705	722	712	713	720	0,714	0,72
748	753	750	769	758	754	753	758	0,755	0,66
781	781	782	790	798	788	788	785	0,787	0,60
820	808	822	—	822	823	821	830	0,821	0,54
852	857	850	851	854	853	858	862	0,855	0,48
884	885	886	—	887	885	887	886	0,886	0,42
916	—	914	912	918	909	912	914	0,914	0,36
929	934	930	942	938	936	937	938	0,936	0,30
955	951	957	954	961	960	961	959	0,957	0,24
974	978	975	964	980	976	980	977	0,976	0,18
981	984	986	990	988	990	988	990	0,987	0,12
994	994	993	994	998	996	996	998	0,995	0,06
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,00

Tabelle VIII. u/u_{max}, Rohr II_A Tal

2	1	3	6	4	5	Mittel	y'/r
0,380	0,416	0,375	0,398		0,349	0,384	0,96
422	522	542	522		440	0,486	0,90
455	600	503	552	0,554	516	0,541	0,84
649	664	660	650	644	642	0,651	0,78
696	704	710	724	698	707	0,706	0,72
749	704	748	766	731	762	0,753	0,66
782	800	790	798	770	780	0,790	0,60
816	827	828	818	826	818	0,822	0,54
826	850	862	850	845	856	0,848	0,48
884	879	878	876	878	876	0,878	0,42
894	900	908	908	915	912	0,906	0,36
937	922	942	947	949	945	0,940	0,30
952	968	962	963	960	958	0,961	0,24
971	978	975	975	971	974	0,974	0,18
986	991	988	990	986	989	0,988	0,12
997	995	993	998	997	996	0,996	0,06
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,00

Die mit der Maximalgeschwindigkeit u_{max} dimensionslos gemachten örtlichen Geschwindigkeiten u wurden in Fig. 10 in Abhängigkeit von y'/r (y' ist der Abstand von der Rohrmitte) aufgetragen (vgl. Tabelle VIII). Es ergab sich dieselbe Beobachtung wie bei J. Nikuradse [3], daß die Profile mit wachsender Reynoldsscher Zahl ($Re = 180 \cdot 10^3$, $325 \cdot 10^3$ und $400 \cdot 10^3$) immer völliger wurden.

Die Geschwindigkeitsverteilungen lassen sich durch Potenzgesetze mit verschiedenen Exponenten annähern:

$$u = cy^n, \qquad (1)$$

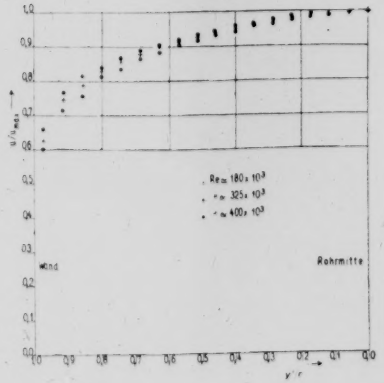

Fig. 10. Geschwindigkeitsverteilung des glatten Rohres bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen.

Wenn man log u als Funktion von log y (y ist der Abstand von der Rohrwand) aufträgt, liegen die Meßwerte auf einer Geraden, deren Neigung den Exponenten n angibt. In Fig. 11 wurden die

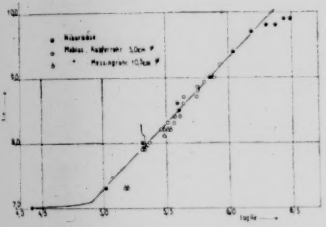

Fig. 11. Exponenten des Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes des glatten Rohres.

reziproken Exponenten der eigenen Messungen (vgl. Signatur ○, ◌) im Bereich der Reynoldsschen Zahlen von $100 \cdot 10^3$ bis $1000 \cdot 10^3$ zugleich mit denen von J. Nikuradse (●) eingetragen. Die beiden Meßreihen liegen sehr gut zusammen und zeigen einen Abfall des Exponenten von 1/7 bei $\log Re \sim 4{,}9$ bis 1/10 bei $\log Re \sim 6{,}5$.

Auf Grund von Dimensionsbetrachtungen gelangte L. Prandtl [4] zu Beziehungen zwischen Widerstandsgesetzen und Geschwindigkeitsverteilungen. Danach lautet das allgemeine Verteilungsgesetz:

$$u = \sqrt{\frac{2\tau_0}{\varrho}} \cdot F\left(\frac{uy}{\nu}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}} \qquad (2)$$

Die örtliche Geschwindigkeit u, mit der Schubspannungsgeschwindigkeit $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$ dimensionslos gemacht, ist also eine Funktion der örtlichen Reynoldsschen Zahl $\frac{uy}{\nu}$ (y = Wandabstand).

Die Schubspannungsgeschwindigkeit v_* läßt sich durch folgende Rechnung bestimmen: Aus der Gleichgewichtsbedingung eines flüssigen Zylinders von der Länge dx und dem Halbmesser r ergibt sich

$$2\pi r \tau_0 = \frac{dp}{dx} \pi r^2 , \qquad (3)$$

$$\frac{dp}{dx} = \psi \frac{\varrho \bar{u}^2}{4r} , \qquad (4)$$

als Definitionsgleichung von ψ. Gleichung (4) in Gleichung (3) eingesetzt ergibt

$$\frac{\tau_0}{\varrho} = \psi \frac{\bar{u}^2}{8} , \qquad (5)$$

also

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} = \sqrt{\psi}\, \frac{\bar{u}}{2{,}83} . \qquad (6)$$

Nikuradse wählte die folgende Gleichung (7) zur Nachprüfung des Prandtlschen Ansatzes:

$$\frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}} = f\left(y \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} \Big/ \nu\right) \qquad (7)$$

oder

$$\varphi = f(\eta) . \qquad (8)$$

Dabei wurde die örtliche Reynoldssche Zahl η aus Wandabstand y, Schubspannungsgeschwindigkeit v_* und kinematischer Zähigkeit ν gebildet und die örtliche Geschwindigkeit u mit v_* dimensionslos gemacht. Diese so definierte Zahl wird mit φ bezeichnet. In Fig. 12 (vgl. auch Tabelle IX) wurde φ als Funktion von η aus acht Profilen ($Re = 152 \cdot 10^3$ bis $402 \cdot 10^3$, bezogen auf Rohrdurchmesser und mittlere Geschwindigkeit), gemessen an dem Messingrohr mit 10,5 cm Durchmesser, aufgetragen. Die Einzelwerte fügen sich in einen Kurvenzug mit einer Streuung der Meßwerte von etwa ± 2,5 Proz. ein.

Nach L. Prandtl besteht bei großen Reynoldsschen Zahlen, d. h. zurücktretendem Zähigkeitseinfluß, eine lineare Beziehung zwischen φ und $\log \eta$

$$\varphi = A \log \eta + B . \qquad (9)$$

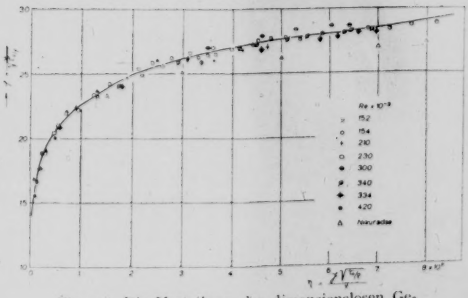

Fig. 12. Die Verteilung der dimensionslosen Geschwindigkeit u/v_* des glatten Rohres.

Tabelle IX

Glatt $r = 5{,}25$ cm. $\mathrm{I} = \frac{y \cdot \sqrt{\tau_0/\varrho}}{\nu} \cdot 10^{-3}$, $\mathrm{II} = \frac{u}{\sqrt{\tau_0/\varrho}}$

3		4		1		2	
I	II	I	II	I	II	I	II
0,10	15,6	0,10	15,4	0,13	16,6	0,15	17,0
0,30	19,0	0,30	18,8	0,39	19,8	0,43	20,4
0,50	20,0	0,50	20,5	—	—	0,72	21,1
0,69	22,1	0,71	21,3	0,92	22,4	1,00	22,4
0,89	22,4	0,93	22,2	—	—	1,28	23,2
1,09	23,5	1,12	22,8	1,44	23,7	1,57	23,8
1,29	23,7	1,33	23,6	—	—	1,85	24,6
1,48	24,2	1,53	24,2	1,88	24,7	2,14	24,9
1,67	24,8	1,74	24,4	—	—	2,42	25,4
1,87	25,3	1,93	25,1	2,49	25,4	2,71	25,8
2,07	25,7	2,14	25,4	—	—	2,99	26,2
2,27	26,0	2,34	25,6	3,01	26,0	3,28	26,2
2,47	26,0	2,55	25,7	—	—	3,56	26,5
2,66	26,0	2,75	26,2	3,53	26,4	3,84	26,9
2,86	26,2	2,95	26,5	—	—	4,13	27,2
3,06	26,2	3,16	26,6	4,07	26,8	4,41	27,5
3,26	26,6	3,36	26,9	—	—	4,70	27,7
3,46	26,8	3,57	27,0	4,60	27,0	4,98	27,8
$\sqrt{\tau_0/\varrho}$	6,64		6,86		9,00		9,68
$Re \cdot 10^{-3}$	152		154		210		230

Tabelle IX. Fortsetzung

Glatt $r = 5{,}25$ cm. $\mathrm{I} = \frac{y \cdot \sqrt{\tau_0/\varrho}}{\nu} \cdot 10^{-3}$, $\mathrm{II} = \frac{u}{\sqrt{\tau_0/\varrho}}$

5		8		6		7	
I	II	I	II	I	II	I	II
0,17	17,6	0,21	17,7	0,20	17,8	0,23	18,9
0,54	21,2	0,61	21,0	0,59	20,9	0,71	22,0
0,89	22,4	1,02	22,0	0,98	22,2	1,19	23,4
1,24	23,4	1,43	23,4	1,37	23,0	1,67	24,0
1,60	24,2	1,82	24,0	1,76	24,0	—	—
1,95	25,2	2,22	24,6	2,15	24,6	2,63	25,6
2,31	25,9	2,62	25,2	2,54	24,9	3,10	26,0
2,66	25,9	3,02	25,8	2,93	25,4	3,58	26,4
3,02	26,4	3,44	26,2	3,32	25,9	3,99	26,9
3,38	27,0	3,83	26,7	3,71	26,2	4,53	27,2
3,72	27,2	4,25	26,9	4,11	26,4	5,01	27,8
4,08	27,7	4,65	27,2	4,50	26,8	5,49	27,8
4,43	27,9	5,03	27,6	4,89	27,3	5,97	28,0
4,79	28,0	5,45	27,8	5,28	27,3	6,44	28,2
5,17	28,4	5,86	28,1	5,67	27,6	6,92	28,4
5,50	28,5	6,27	28,1	6,06	27,8	7,40	28,4
5,85	28,6	6,67	28,2	6,45	28,1	7,87	28,6
6,20	28,6	7,08	28,3	6,85	28,1	8,36	28,8
$\sqrt{\tau_0/\varrho}$	12,2		13,0		13,3		15,6
$Re \cdot 10^{-3}$	300		340		334		402

Bei Auftragung von φ als Funktion von $\log \eta$ (vgl. Fig. 13) lagen die Meßwerte sehr gut auf einer Geraden, die jedoch eine etwas stärkere Neigung als die von Nikuradse gefundene aufwies. Außerdem wurde noch die von A. Fage [20] für kleine $\log \eta$ (1,3 bis 2,8) aus Messungen mit dem Ultramikroskop und Pitotrohr erhaltene Gerade eingezeichnet. Sie läuft in dem

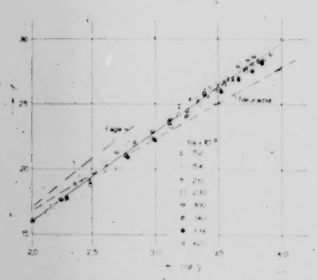

Fig. 13. φ als Funktion von $\log \eta$ (glattes Rohr).

gemeinsamen Meßbereich von $\log \eta = 2{,}0$ bis $2{,}8$ ungefähr parallel mit der hier gefundenen, liegt aber im Mittel etwa 7 Proz. höher.

	A	B	$\log \eta$
Nikuradse . .	5,75	5,5	1,0 bis 5,0
Fage	7,2	2,0	1,3 bis 2,8
Möbius	6,8	2,4	2,0 bis 3,0

5. Die Geschwindigkeitsverteilung bei Strömungen in rauhen Rohren

An den rauhen Rohren I_1 ($k/\bar{r} = 0{,}101$, $L_2/k = 9{,}0$), I_{II} ($k/\bar{r} = 0{,}101$, $L_2/k = 18{,}0$) und II_1 ($k/\bar{r} = 0{,}101$, $L_2/k = 9$) wurden ebenfalls Gv.-Messungen angestellt. (Einzelwerte finden sich in den Tabellen VII.) Beim Rohr I_1 wurden sowohl in der Mitte zwischen zwei Rauhigkeitselementen (Tal) als auch an der Stelle der Blenden (Berg) je 6–8 Profile gemessen. Da die Verhältniszahlen u/u_{max} keine systematische Änderung mit den Reynoldsschen Zahlen zeigten (vgl. Tabelle VIII), wurden Mittelwerte aus den Einzelprofilen gebildet und in Fig. 14 zusammen mit einer Verteilungskurve des glatten Rohres in Abhängigkeit von y/r aufgetragen. Es ist bemerkenswert, daß sich, abgesehen von einer kleinen Randpartie, ein einheitliches Profil längs des ganzen Rohres (abgesehen von der Anlauflänge) einstellt, das sich auch an den Stellen der Rauhigkeitselemente nicht merklich verändert. Das sieht man daraus, daß die Gv.-Messung an der Stelle „Berg" mit der an der Stelle „Tal" dann gut übereinstimmt, wenn man den mittleren ($\bar{r} \sim 2{,}5$) und nicht den bei „Berg" davon stark

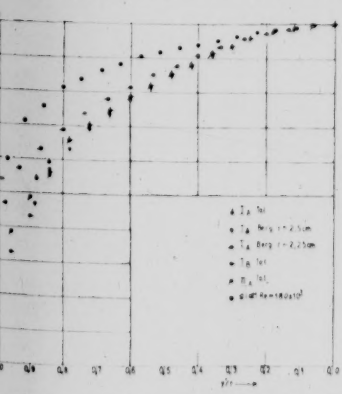

Fig. 14. Geschwindigkeitsverteilung für rauhe Rohre.

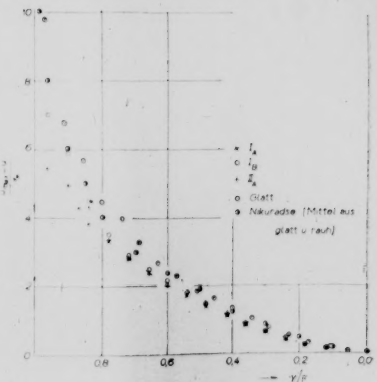

Fig. 15. Geschwindigkeitsverteilung glatter und rauher Rohre.

abweichenden örtlichen ($r_1 = 2{,}25$ cm) Halbmesser in das Verhältnis y/r einsetzt. Bei den Rohren I_{II} und II_1 wurde nur im „Tal" gemessen.

Im ganzen zeigen die Geschwindigkeitsverteilungen der rauhen Rohre eine spitzere Form als die des glatten Rohres, was sich auch aus den Exponenten n bei logarithmischer Auftragung (IV, 4, Gleichung (1)) und aus dem Verhältnis u/u_{max} ergibt (vgl. Tabelle XI).

Tabelle XI

Rohre	I_1 Tal	I_1 Berg	II_1 Tal	I_{II} Tal	Glatt
$1/n$	3,10	3,05	3,20	3,32	7,3 bis 8,4[1])
$\bar{u}/u_{max}$	0,500	0,501	0,505	0,614	0,822 bis 0,851[1])

Insbesondere zeigen die Profile (Fig. 14) von Rohr I_1 und dem dazu geometrisch ähnlichen Rohre II_1 befriedigende Übereinstimmung.

[1]) Abhängig von *Re*.

Tabelle X

$I = y'/r$, $II = y'/r_1$, $III = y'/r_2$, $IV = \frac{u_{max} - u}{\sqrt{\tau_0/\varrho}}$

Glatt		I_A Tal		I_A Berg			II_A Tal		I_B Tal	
I	IV	I	IV	II	III	IV	I	IV	I	IV
0,97	9,8			0,98	0,88	4,9	0,96	6,0	0,96	7,0
0,91	6,8	0,88	4,3	0,93	0,84	4,0	0,90	4,9	0,90	5,9
0,86	5,7	0,84	3,8	0,87	0,78	3,4	0,84	4,4	0,84	4,5
0,80	4,5	0,78	3,3	0,80	0,72	2,9	0,78	3,3	0,78	3,5
0,74	4,0	0,72	2,8	0,73	0,66	2,5	0,72	2,8	0,72	2,9
0,69	3,3	0,66	2,4	0,67	0,60	2,0	0,66	2,4	0,66	2,5
0,63	2,7	0,60	2,0	0,60	0,54	1,73	0,60	2,0	0,60	2,2
0,57	2,3	0,54	1,69	0,53	0,48	1,42	0,54	1,86	0,54	1,82
0,51	1,85	0,48	1,30	0,47	0,42	1,14	0,48	1,48	0,48	1,48
0,46	1,64	0,42	1,10	0,40	0,36	0,86	0,42	1,20	0,42	1,17
0,40	1,38	0,30	0,82	0,33	0,30	0,66	0,36	0,90	0,36	0,87
0,34	1,04	0,30	0,61	0,27	0,24	0,40	0,30	0,57	0,30	0,65
0,29	0,73	0,24	0,39	0,20	0,18	0,26	0,24	0,37	0,24	0,42
0,23	0,56	0,18	0,25	0,13	0,12	0,12	0,18	0,24	0,18	0,26
0,17	0,35	0,12	0,11	0,07	0,06	0,04	0,12	0,10	0,12	0,13
0,11	0,21	0,06	0,04	0,00	0,00	0,00	0,06	0,04	0,06	0,05
0,06	0,09	0,00	0,00				0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00									

In Fig. 15 und in der Tabelle X wurden die Mittelwerte von $\frac{u_{max} - u}{v_*}$ (aus 6–9 Einzelprofilen) in Abhängigkeit von y'/r aufgetragen. Diese Beziehung wurde zuerst von Stanton [8] für geometrisch ähnliche Rohre angewandt. Aus Fig. 15 ersieht man, daß bei dieser Auftragung die Geschwindigkeitsverteilungen des glatten und der rauhen Rohre gegenüber der Darstellung in Fig. 14 weitgehend zusammenrücken, wenn auch nicht so vollständig, wie dies bei den Nikuradseschen Sandrauhigkeiten der Fall ist.

In Fig. 16 wurde, wie in Fig. 13, für das glatte Rohr, q als Funktion von $\log \eta_l$ für Rohr I_A und I_B aufgetragen. Die Neigung der durch die Meßpunkte gelegten Geraden ergab im Mittel 5,75 (vgl. Gleichung (9) in IV, 4), d. h. gute Übereinstimmung mit Prandtl-Nikuradse. Im Gegensatz zum glatten Rohr (Fig. 13) erhält man hier eine starke Aufspaltung nach Reynoldsschen Zahlen, die darauf zurückzuführen ist, daß eine Änderung von Re bei festgehaltenem γ nur η_l und nicht q verändert; denn es ist

$$q = \frac{u}{v_*} = \frac{u}{\sqrt{\psi}\,\bar{u}} = 2{,}83 \cdot \frac{y}{\eta_l} = \frac{y \cdot v_*}{\sqrt{\psi}\,\bar{u}\,\nu} = 2{,}83 \cdot \frac{y}{\nu}.$$

Infolge der experimentell festgestellten Unabhängigkeit der Größe $u/\bar{u}$ von Re und des quadratischen Widerstandsgesetzes (ψ = const) folgt also auch q = const. Da η_l proportional zu Re (wegen der Konstanz von ψ) ist, ergibt sich in Fig. 16 eine Aufspaltung nach Re, deren Größe annähernd zu dieser Überlegung stimmt.

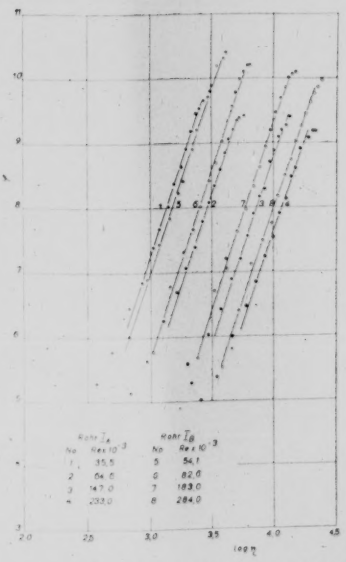

Fig. 16. q als Funktion von $\log \eta_l$ (rauhe Rohre).

6. Abhängigkeit des Widerstandes von der relativen Rauhigkeit

Bei gleicher geometrischer Form der rauhen Wand und quadratischem Widerstand gilt für beliebige relative Rauhigkeit $k/\bar{r}$ nach der Theorie von Prandtl die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}} = 2\log\frac{\bar{r}}{k} + a\,. \qquad (1)$$

Bei einer Auftragung von $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ als Funktion von $\log \bar{r}/k$ erhält man hiernach eine Gerade mit der Neigung 2, die die $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$-Achse im Abstand a vom Nullpunkt aus schneidet. a ist konstant für ähnliche Form und Anordnung der Rauhigkeiten. Für verschiedene Rauhigkeitsformen und -anordnungen nimmt a jeweils einen verschiedenen Wert an. J. Nikuradse [10] fand bei Sandrohren den Wert $a = 1{,}74$. Außerhalb des quadratischen Gesetzes besteht noch eine Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl ($\overline{v}d\,\nu$ oder v_*k/ν).

Um die Richtigkeit der Gleichung (1) auch für unsere, gegenüber Nikuradse ganz andersartigen und stärkeren Rauhigkeiten nachzuprüfen, wurden bei den Rohren I_B, I_H, I_K, I_J geometrisch ähnliche Blenden (Höhe k = Dicke L_1) in nahezu gleichem relativem Abstand $L_2/k \sim 18$ eingesetzt und die Widerstandsbeiwerte ψ gemessen. Diese sind für eine Reynoldssche Zahl $200 \cdot 10^3$ in der Tabelle VI zusammengestellt. Um die Ergebnisse mit denen anderer Forscher vergleichen zu können, wurden zunächst die a-Werte aus Gleichung (1) berechnet und in Tabelle VI eingetragen.

Tabelle VI

Rohre	I_B	I_H	I_K	I_J
$\log \bar{r}/k$	1,00	1,22	1,41	1,54
ψ	0,214	0,137	0,0973	0,0789
$1/\sqrt{\psi}$	2,16	2,70	3,20	3,50
a	0,16	0,20	0,38	0,48
$\log \bar{r}/k_s$	0,28	0,50	0,68	0,82

Die Abweichungen zwischen den a-Werten für die verschiedenen Rohre (nach der Prandtlschen Theorie sollten sie sich gleich ergeben) erklärt sich sicher teilweise dadurch, daß die geometrisch ähnliche Anordnung und Form der Rauhigkeiten nicht völlig erreicht wurde. Bei den Rohren I_B und I_H betrug der relative Blendenabstand L_2/k genau 18,0, dagegen war für I_K $L_2/k = 18{,}3$ und für I_J $L_2/k = 18{,}6$. Diese Abweichung bewirkt, wie aus Fig. 20 ersichtlich ist, eine Widerstandsverringerung für die Rohre I_K und I_J. Außerdem waren, wie in Abschnitt

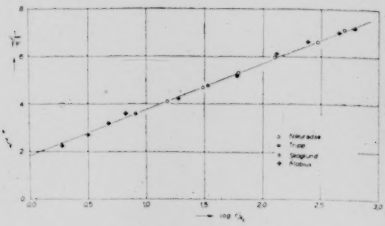

Fig. 17. $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ in Abhängigkeit von $\log \frac{\bar{r}}{k_s}$.

IV b, 2 beschrieben, die Kanten der Blenden absolut gleich stark – also nicht ähnlich – abgegratet. Das bedeutet, daß bei den kleinsten Rauhigkeiten ein etwas zu kleiner Widerstand, d. h. ein größeres a gemessen wurde (vgl. hierzu den Einfluß der Abgratung auf den Widerstand, Abschnitt IV b, 2). Für nicht abgegratete, scharfe und relativ viel dünnere Blenden, wie sie Arredi [17] verwendet hat, ergibt sich ein noch größerer Widerstand für das in diese Meßreihe passende Rohr (Gruppe V, Serie 5 nach

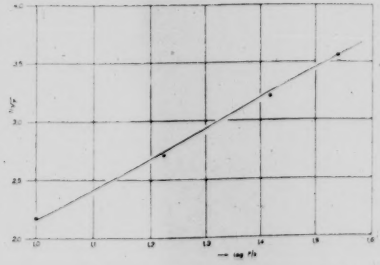

Abb. 18. $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ in Abhängigkeit von $\log \frac{\bar{r}}{k}$.

Arredischer Bezeichnung), entsprechend einem noch kleineren a-Wert von −0,10 (vgl. Fig. 19).

Um die Widerstände geometrisch verschiedener Rauhigkeiten miteinander vergleichen zu können, führte H. Schlichting [12] den Begriff der äquivalenten Sandrauhigkeit (vgl. S. 203) oder auch die dimensionslose Zahl

$\alpha = k_s/k$ (k ist dabei die vorliegende Rauhigkeitshöhe) ein, die sich aus Gleichung (2) errechnen läßt:

$$2 \log \alpha = 1{,}74 - a \,. \qquad (2)$$

Fig. 17, in der $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ als Funktion von $\log \bar{r}/k_s$ aufgetragen ist, läßt zunächst erkennen, welcher Bereich der äquivalenten Sandrauhigkeiten durch Nikuradsesche [10] Werte, unsere eigenen und die von Skoglund [15] und Tripp [14] erfaßt ist. Er erstreckt sich von $\log \bar{r}/k_s = 0{,}3$ bis $\log \bar{r}/k_s = 2{,}8$. Unsere Werte für k_s wurden hierbei auf folgende Weise erhalten: Aus dem Mittelwert der a-Werte für die vier Rohre ($a = 0{,}29$) wurde nach Gleichung (2) $\alpha = 5{,}3$ berechnet und hieraus wurden die k_s-Werte der vier Rohre bestimmt. Die Abweichung der gemessenen Werte für $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ von der Gleichung (1), bezogen auf Sandrauhigkeiten (d. h. von der Geraden der Fig. 17), ergibt sich mit dem, wie vorstehend angegebenen, berechneten k_s-Werten maximal zu 6 Proz.[1]).

Ein weiterer Vergleich zwischen unseren Messungen und der Prandtlschen Gleichung ergibt sich in der Weise, daß man in ein $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$, $\log \bar{r}/k$-Diagramm für die vier Rohre I_B, I_H, I_K, I_J die gemessenen Werte einträgt. Dies ist in Fig. 18 geschehen. Man erkennt, daß eine durch die vier Meßpunkte gezogene Gerade nicht die Neigung 2 (siehe Gleichung (1)) aufweist, sondern die Neigung 2,5. Auch so betrachtet, zeigt sich also eine gewisse Abweichung von der Theorie, die wir, wie oben gesagt, zum Teil auf die nicht völlige Erfüllung der geometrischen Ähnlichkeit der Rauhigkeiten zurückführen dürfen. Hierfür spricht insbesondere noch, daß unsere Geschwindigkeitsverteilungsmessungen an rauhen Rohren (vgl. Fig. 16) — wie bei Prandtl-Nikuradse eine Neigung von 5,75 [entsprechend einem Faktor 2 in Gleichung (1)] ergeben. Die gute Übereinstimmung kann sich hier deshalb ergeben, weil die Neigung der φ-log η-Geraden von der Form der Rauhigkeiten unabhängig ist, in ihr also eine Verletzung der Ähnlichkeit durch verschiedene rauhe Rohre nicht zum Ausdruck kommt.

Einen Überblick über das gesamte gemessene Gebiet der Reynoldsschen Zahlen für die ähnlichen Rauhigkeiten zeigt Fig. 19, in der $a = \frac{1}{\sqrt{\psi}} - 2 \log \bar{r}/k$ als Funktion der Reynoldsschen Zahl der Rauhigkeitselemente $v_* k/\nu$ aufgetragen ist. Diese ergibt sich aus Gleichung (6), Abschnitt IVb, 4, zu:

$$\frac{v_* k}{\nu} = Re \sqrt{\psi} \, \frac{k}{d \cdot 2{,}83} \,. \qquad (3)$$

In Fig. 19 sind einige Werte für die Rohre I_B, I_H, I_K, I_J und für ein Rohr von Arredi (V, s)

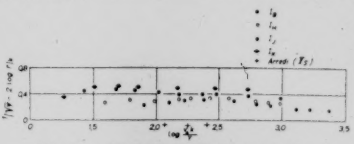

Fig. 19. a in Abhängigkeit von $v_* k/\nu$.

mit einem $L_2/k = 17{,}5$ eingetragen. Bei Erfüllung der Prandtlschen Theorie im Bereich eines völlig quadratischen Widerstandsgesetzes sollten die dort eingezeichneten Punkte sich in eine horizontale Gerade einfügen. Die hier auftretenden Abweichungen beruhen auf der vorgenannten Verletzung der Ähnlichkeit und dem nicht völlig quadratischen Verlauf der ψ-Re-Kurven (vgl. Fig. 8). Die beiden Rohre I_B und I_H mit völlig ähnlichen Rauhigkeiten zeigen jedoch sehr gute Übereinstimmung (vgl. Fig. 19, Signatur ◑ und ○), so daß darin ebenso eine Bestätigung für die Prandtlsche Theorie gesehen werden kann wie in den Geschwindigkeitsverteilungen des rauhen Rohres.

7. Der Widerstand als Funktion des Abstandes der Rauhigkeitselemente

Bei konstantem $k/\bar{r}$ und derselben Form der Rauhigkeitselemente lassen sich folgende Überlegungen über den Zusammenhang des Widerstandes mit dem Abstand der Rauhigkeiten L_2/k anstellen. Vorausgesetzt muß hier noch werden, daß die Festsetzung des Rohrhalbmessers auf die Art, wie in dem Abschnitt III, 1 beschrieben, erfolgt (Mittelung aus dem Volumen).

Wenn man in einem glatten Rohr ein einziges Rauhigkeitselement anbringt, so wird dieses mit der vollen Größe seines eigenen Widerstandes den des glatten Rohres erhöhen. Die Einzelwiderstände mehrerer Elemente werden sich nur dann voll summieren, wenn die Elemente so weit auseinanderliegen, daß die Störungen der Strömung, die vom stromaufwärts liegenden Element herrühren, bis zu der Stelle des stromabliegenden abgeklungen sind. Je näher nun die Elemente aneinander rücken, um so mehr wird das obere Element das untere stören, es wird dieses abschirmen. Der Widerstand ist dann kleiner als

1) Diese Abweichung entspricht der Abweichung der a-Werte von ihrem oben für die Berechnung der k_s-Werte benutzten Mittel. Deren Maximalbetrag (0,19) bewirkt nach Gleichung (1) in $1/\sqrt{\psi}$ ebenfalls eine Änderung von rund 6 Proz.

die Summe der Einzelwiderstände und desjenigen der glatten Zwischenstücke. In diesem Gebiet der gegenseitigen Beeinflussung ($L_2\,k = 8$ bis 60) lagen die Versuche der vorliegenden Arbeit. Die Widerstände der Rohre I_1, I_2, I_3 zeigen dieses Verhalten eindeutig. Bei diesen Rohren wurde die relative Rauhigkeit $k\,\bar{r}$ konstant gleich 0,1 gehalten und der relative Abstand $L_2\,k = 9, 18, 36$ hergestellt. Obgleich sich also die Abstände wie 0,25 : 0,5 : 1 verhalten, ändert sich der Widerstandsbeiwert nur im Verhältnis 0,266 : 0,214 : 0,153, also etwa wie 1 : 0,8 : 0,58.

Wenn man von dem Extremfall ausgeht, daß die Rauhigkeitselemente (in dem vorliegenden Falle Stauränder) vollständig aneinanderrücken, d. h. $L_2\,k = 0$ wird, erhält man bei idealer Ausführung (fugenloses Berühren) den Widerstand des glatten Rohres. Bei anderen Formen der Rauhigkeitselemente, z. B. Sandkörnern, Kugelkalotten, Kegeln u. ä. wird selbst bei engster Packung ein rauher Grenzwiderstand übrigbleiben. Wenn man, von dichtester Packung ausgehend, die Abstände allmählich vergrößert, nimmt der Widerstand rasch zu. So findet F. Arredi [17] mit zunehmendem L_2 erhöhten Widerstand. Man kann sich von diesem Vorgang folgendes Bild machen. Die Strömung wird mit zunehmendem Abstand immer tiefer in die Zwischengebiete eindringen, so daß die gegenseitige Abschirmung der einzelnen Elemente geringer und damit der Widerstand größer wird, obwohl jetzt auf die Längeneinheit weniger Rauhigkeitselemente entfallen. Dies steht auch im Einklang mit Beobachtungen von J. Nikuradse [10], dessen Sandrauhigkeiten einen relativen Abstand von etwa 1 bis 2 hatten. Er gibt an, daß bei seinen Vorversuchen durch Wegwaschen von Sandkörnern der Widerstand erhöht wurde. Obgleich also weniger Rauhigkeitselemente sich in der Meßstrecke befanden, nahm der Widerstand zu. Zwischen den beiden Bereichen zunehmenden Widerstandes mit zunehmendem $L_2\,k$ einerseits und abnehmenden Widerstandes mit zunehmendem $L_2\,k$ anderseits muß also ein Höchstwert des Widerstandes liegen.

Die Widerstandsbeiwerte der Rohre I_1 bis I_K (genommen für $Re = 200 \cdot 10^3$) wurden in Fig. 20 als Funktion von $L_2\,k$ aufgetragen. Weiterhin wurde die Prandtlsche Gleichung (1) (Abschnitt IV b, 6) dazu benutzt, aus gemessenen ψ- und $\bar{r}\,k$-Werten das zugehörige a zu berechnen. Hiermit wurden aus den gemessenen ψ-Werten für jeweils gleiche $L_2\,k$ die ψ-Werte für die anderen $k\,\bar{r}$ berechnet. Auf diese Weise konnten dann ψ-$L_2\,k$-Kurven über einen größeren Bereich von $L_2\,k$ für die sechs Parameter $k\,\bar{r} = 0{,}22;\ 0{,}14;\ 0{,}10;\ 0{,}06;\ 0{,}04;\ 0{,}03$ gezeichnet werden[1]). Außerdem sind zur Vervollständigung eine Meßreihe von F. Arredi, Gruppe V, mit $k\,\bar{r} = 0{,}20$ und zwei Werte für Sandrauhigkeiten von E. Estel [18] und Nikuradse sowie Blendenmessungen von E. Estel mit $k\,\bar{r} = 0{,}10$, $L_2\,k = 26$; $k\,\bar{r} = 0{,}02$, $L_2\,k = 127$ eingetragen. Alle diese Werte fügen sich in das allgemeine

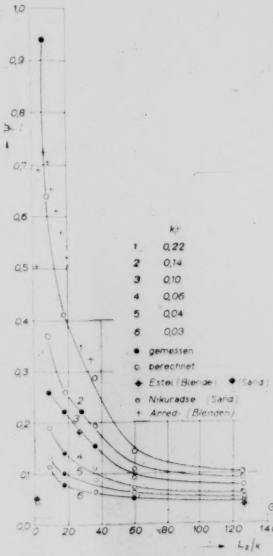

Fig. 20. ψ in Abhängigkeit von $L_2\,k$.

Bild gut ein. Insbesondere erkennt man deutlich, daß das obenerwähnte Maximum bei den Messungen von F. Arredi (Gruppe V) bei $L_2\,k = 8$ liegt (bei den anderen Gruppen I–IV mit größerem $k\,\bar{r}$, die in Fig. 20 nicht mit eingezeichnet sind, liegt dieses bei $L_2/k = 6{,}7$ bis 8). Auch H. Schlichting [12] beobachtete ein Maximum, das für „lange Winkel", die den Versuchen mit Staurändern entsprechen, mit $k\,\bar{r} = 0{,}1$ bei $L_2\,k = 8$ liegt.

V. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde zunächst durch Messung des Widerstandbeiwertes an zwei Rohren, deren geometrische Abmessungen ähnlich vergrößert wurden, das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz für rauhe Rohre (Rauhigkeiten erzeugt durch systematische Anordnung von Staurändern) unmittelbar bestätigt. Ferner wurden

[1]) Wegen der abweichenden Rauhigkeitsformen der verschiedenen Rohre nur näherungsweise richtig.

die Widerstandsbeiwerte von 10 Rohren verschiedener Rauhigkeiten (die relative Rauhigkeit k/r wurde zwischen 0,03 und 0,22 und der relative Abstand der Blenden L_2/k von 8,2 bis 60,8 verändert) in einem Gebiet Reynoldsscher Zahlen (bezogen auf Rohrdurchmesser) von $7 \cdot 10^3$ bis $400 \cdot 10^3$ gemessen. Bei drei rauhen Rohren und einem glatten Rohre wurde außerdem die Geschwindigkeitsverteilung ermittelt. Sowohl Widerstandsbeiwerte wie auch Geschwindigkeitsverteilungen wurden auch in einer Form dargestellt, die einen Vergleich mit Prandtls theoretischen Ansätzen und eine Einordnung der „Staurandrauhigkeiten" in die „Sandrauhigkeiten" gestattete. Der Einfluß der Abstände der Rauhigkeitselemente konnte an Hand der Versuchsergebnisse noch besonders diskutiert werden.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Leipzig, Abteilung für angewandte Mechanik und Thermodynamik, ausgeführt. Es ist mir eine besondere Freude, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. L. Schiller, für die Anregung zu dieser Arbeit und die Förderung, die er ihr zukommen ließ, herzlich zu danken. Für die Einführung in die Meßtechnik und die wertvollen Anregungen danke ich den ehemaligen Assistenten der Abteilung, den Herren Dr.-Ing. habil. R. Hermann und Dr. A. Naumann. Ferner gilt mein Dank Herrn Dr. E. Estel, der mich bei der Abfassung der Arbeit bestens beriet. Auch der Helmholtz-Gesellschaft sei an dieser Stelle für die zur teilweisen Neubeschaffung der Versuchsanlage gewährten Geldmittel bestens gedankt.

Mein besonderer Dank gilt ferner dem ehemaligen Mechanikermeister der Abteilung, Herrn G. Hentsch, der die vielen mechanischen Arbeiten mit viel Verständnis zur besten Zufriedenheit ausführte und mich oft bei den Messungen unterstützte.

VI. Literaturverzeichnis

1) R. Hermann, Experimentelle Untersuchung zum Widerstandsgesetz des Kreisrohres bei hohen Reynoldsschen Zahlen und großen Anlauflängen. Leipziger Dissertation, 1929. Siehe auch R. Hermann und Th. Burbach, Strömungswiderstand und Wärmeübergang in Rohren. Akadem. Verlagsgesellschaft, 1930; L. Schiller, Rohrwiderstand bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Vorträge auf dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929), S. 69. Berlin 1930.

2) J. Nikuradse, Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. Forsch.-Arb. Ing.-Wesen, H. 356. Berlin 1932.

3) J. Nikuradse, Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. Forsch.-Arb. Ing.-Wesen, H. 281. Berlin 1926.

4) L. Prandtl, Über die ausgebildete Turbulenz. Verh. d. 2. internat. Kongr. techn. Mech. S. 62. Zürich 1927.

5) L. Prandtl, Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Zeitschr. VDI. **77**, 105, 1933.

6) L. Schiller, Handbuch der Experimentalphysik von Wien-Harms, Bd. 4, Teil 4, S. 186ff.

7) K. Fromm, Strömungswiderstand in rauhen Röhren. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **3**, 339, 1923.

8) T. E. Stanton, Proc. Roy. Soc. London **85**, 366, 1911.

9) L. Schiller, Über den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts und Rauhigkeitsgrades. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **3**, 2, 1923.

10) J. Nikuradse, Strömungsgesetze in rauhen Rohren. Forsch.-Arb. Ing.-Wesen, H. 361. Berlin 1933.

11) C. F. Colebrook und C. M. White, Experiments with Fluid Friction in Roughened Pipes. Proc. Roy. Soc. London **161**, 367, 1937.

12) H. Schlichting, Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeitsproblem. Ing.-Arch. **7**, 1, 1936.

13) V. Streeter, Frictional Resistance in Artificially Roughened Pipes. Proc. Amer. Soc. of Civil Eng. **61**, 163, 1935. Vgl. auch das ausführliche Referat von L. Schiller, Forsch. a. d. Geb. d. Ing.-Wesens **7**, 154, 1936.

14) W. Tripp, Friction Losses in an Artificially Roughened Rectangular Channel. Journ. of the Aeronaut. Sci. **4**, 10, 1936.

15) V. J. Skoglund, Effect of Roughness on the Friction Coefficient of a Closed Channel. Journ. of the Aeronaut. Sci. **4**, 28, 1936.

16) F. Schultz-Grunow, Der hydraulische Reibungswiderstand von Platten mit mäßig rauher Oberfläche, insbesondere von Schiffsoberflächen. Jahrbuch d. Schiffbautechn. Ges., S. 176, 1938.

17) F. Arredi, Ricerche sperimentali sul fenomeno „Evtelwein". Ricerche di Ing. **8**, 264, 1934.

18) E. Estel, Experimentelle Untersuchung des Einflusses von Pulsationen auf den Strömungswiderstand von Kreisrohren und die Durchflußzahl von Normdüsen. Leipziger Dissertation, 1936. Siehe auch: Durchflußzahl von Normdüsen und Druckabfall in Rohren bei pulsierender Strömung. Physik. Zeitschr. **38**, 748, 1937.

19) R. Lehnert, Akustische Messungen an Wirbelstraßen hinter Kreiszylinder und ebener Platte. Physik. Zeitschr. **38**, 476, 1937.

20) A. Fage, Turbulent Flow in a Circular Pipe. Phil. Mag. **21**, 80, 1936.

21) M. Barker, Proc. Roy. Soc. London **101**, 435, 1922.

22) F. Homann, Einfluß großer Zähigkeit bei Strömung um Zylinder. Forsch. a. d. Geb. d. Ing.-Wesens **7**, 1, 1936.

23) O. Reynolds, An Experimental Investigation etc. Phil. Trans. **174**, 935, 1883.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 5. Februar 1940)

BESPRECHUNGEN

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

P. Diepgen, Das physikalische Denken in der Geschichte der Medizin. Gr.-8°, 39 S. Stuttgart 1939. Ferdinand Enke. Geh. RM 2.—.

Die vorliegende Schrift zeigt Wege und Irrwege des physikalischen Denkens in den theoretischen Gedankengängen der Medizin von der Antike bis in die neueste Zeit. Auch der Physiker wird diese kleine historische Studie mit Interesse lesen und dem Verfasser in seinem Schlußsatz gerne beipflichten: „Aber immer war das physikalische Denken für die Ärzte eine Schule zur Exaktheit, deren Bedeutung man über aller Einseitigkeit und Übertreibung nicht unterschätzen darf."

L. Schiller

Ergebnisse der kosmischen Physik. Bd. IV. Physik der Hydro- und Lithosphäre (IV. Supplementband zu Gerlands Beiträge zur Geophysik). Gr.-8°. 161 Figuren. 293 S. Leipzig 1939. Akademische Verlagsgesellschaft. Geh. RM 29.—, geb. RM 31.—.

Der vorliegende 4. Band der Ergebnisse der kosmischen Physik behandelt die Meeresströmungen, das elastische Verhalten der obersten Erdschichten und deren elektrische Leitfähigkeit in zusammengefaßter Darstellung nach dem Stande der neuzeitlichen Forschung. Der Inhalt gliedert sich in:

V. Walfrid Ekman, Neuere Ergebnisse und Probleme zur Theorie der Konvektionsströme im Meere;
H. Jeffreys, Deep focus earthquakes;
Ch. Tsuboi, Deformations of the earth's crust as disclosed by geodetic measurements;
B. Gutenberg, Zur Entwicklung der seismischen Aufschlußmethoden, und
V. Fritsch, Einiges über den Aufbau und die Eigenschaften geologischer Leiter.

Für den Physiker sind von besonderem Interesse die Angaben über die mit Sicherheit nachgewiesenen tiefen Erdbebenherde (bis 700 km Tiefe), die überaus sorgfältig beobachteten relativen langsamen Bewegungsamplituden an der Erdoberfläche und die praktischen seismischen Aufschlußverfahren. Aus allen drei verschiedenen Arbeitsgebieten lassen sich das im kleinen bekannte elastische Verhalten von Laboratoriumsmaterialien auch im großen für die entsprechenden elastischen Konstanten unserer Erdkruste nachweisen. Einen Teil aus dem Gebiet der elektrischen Aufschlußmethoden — die elektrischen Konstanten der obersten Erdkruste — behandelt der letzte Artikel. Alle fünf Artikel geben in ihrem Gebiet für den Physiker einen gründlichen Überblick über besonders vorwärtsgetriebene Spezialgebiete der Ozeanographie und Geophysik.

O. Meißer

G. Flügel, Berechnung von Strahlapparaten. VDI-Forschungsheft 395. DIN A 4. 23 S. 14 Abb. Berlin 1939. VDI-Verlag G. m. b. H. RM 5.— (für VDI-Mitglieder RM 4.50).

Die theoretische Behandlung der teilweise sehr verwickelten Strömungsverhältnisse in Strahlapparaten steht noch in ihren ersten Anfängen, obwohl die praktische Bedeutung der Apparate immer mehr steigt, so daß der Bau von Strahlapparaten heute meist auf empirischen Grundlagen beruht. Der Zweck der Arbeit ist, zu zeigen, daß auf Grund einfacher Ansätze eine rationelle Behandlung des Problems erfolgen kann.

Zunächst wird das bisher allgemein übliche Berechnungsverfahren auf Grund der Energiegleichung als Vergleichsgrundlage für die mitgeteilten neueren Ansätze dargestellt, die wesentlich von der Impulsgleichung Gebrauch machen. Diese neuere Berechnung liefert eine Angabe über die günstigste Form der Fangdüse, wie auch über deren Einlaufform.

Der dritte Teil der Arbeit ist der Berücksichtigung der Wandreibungsverluste in der Eintrittsdüse, im Mischraum und im Diffusor gewidmet. Hier wird eine Aufteilung des gesamten Mischvorganges in einen Teil konstanten Druckes von der Treibdüsenmündung bis zum Beginn der engsten Stelle der Fangdüse und einen Teil ansteigenden Druckes, in dem die Durchmischung von Treibstrahl und gefördertem Strahl in konstantem Querschnitt vor sich geht, vorgenommen. Schließlich wird der Druckanstieg im Diffusor berechnet.

Aus den Ansätzen über die Fortschrittsgeschwindigkeit der Vermischung und die Art der Vermischung können Länge und Querschnittsverlauf der Fangdüse ermittelt werden.

Während zunächst alle Ableitungen unter der Voraussetzung erfolgten, daß Treibgas und gefördertes Mittel der gleiche Stoff sind, wird in einem letzten Abschnitt eine Erweiterung auf verschiedenartige Stoffe (aber stets noch unter Voraussetzung gleicher Aggregatzustände) gegeben, wobei für diesen Fall ein Ansatz für die turbulente Durchmischung mitgeteilt wird.

Neben den praktisch wichtigen Rechengrundlagen für Strahlapparate dürfte der Leser dieser Zeitschrift vor allem an den strömungsphysikalischen Erörterungen über fortschreitende Vermischung gleicher und verschiedenartiger Mittel Interesse haben.

A. Naumann

E. Hiedemann, Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung. X u. 287 Seiten. Mit 232 Abb. und einer Farbentafel. Berlin 1939. W. de Gruyter. Geb. RM 24.—.

Bei der großen Bedeutung, zu der in den letzten Jahren die Ultraschallforschung gelangt ist, ist es nicht verwunderlich, vielleicht von mancher Seite

sogar erwünscht, einen weiteren zusammenfassenden Überblick vorliegen zu haben. Der Verfasser, der sich mit mehreren wertvollen Arbeiten auf diesem Gebiet bereits einen Namen gemacht hat, bezeichnet sein Buch als eine über eine Berichterstattung hinausgehende systematische und kritische Darstellung und teilt es ein in: 1. Erzeugung von US.; 2. Methoden der Untersuchung des Schallfeldes: Mechanische und optische Methoden (US.-Wellen als optisches Gitter), Absorptionsmessungen; 3. Ausbreitung von US: In räumlich ausgedehnten und begrenzten Medien, Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Bestimmung der elastischen Konstanten von Festkörpern; 4. Wirkungen und technische Anwendungen, darunter Schwebestoffe im Schallfeld, Werkstoffprüfung und Vergütung, Lichtsteuerung und anderes. — Das sehr gut ausgestattete Buch ist mit einem nützlichen Tabellenanhang und ausführlichem Literaturverzeichnis versehen.

F. Rogowski

J. C. Poggendorffs biographisch-literarisches Handwörterbuch für Mathematik, Astronomie, Physik mit Geophysik, Chemie, Kristallographie und verwandte Wissensgebiete. Bd. VI: 1923—1931. Hrsgg. unter Mitwirkung der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München und der Akademie der Wissenschaften in Wien von der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Redigiert von H. Stobbe †. III. Teil: L—R. Gr.-8°. XL u. 818 Seiten (S. 1439—2256). Berlin 1938. Verlag Chemie G. m. b. H. Brosch. RM 85.— (für Vorausbesteller RM 76.50, für Mitglieder der mitwirkenden Akademien RM 68.—).

Jeder Mathematiker und exakte Naturwissenschaftler freut sich mit Recht, wenn wieder ein neuer Band des „Poggendorff" erscheint. Denn er hat nicht seinesgleichen. Dies gilt auch für den vorliegenden neuen Teilband, der die Autoren L—R enthält. Allerdings ist diesmal die Freude mit Wehmut gemischt. Denn Titel und Vorwort bringen die traurige Nachricht, daß der hochbewährte Redakteur und Neuorganisator des Werkes, Hans Stobbe, nicht mehr die Vollendung des VI. Bandes erleben sollte. Dies bedeutet für das Werk und seine Nutznießer einen herben Verlust, dessen Größe man ermessen kann, wenn man die Güte des „Poggendorff" kennt und weiter aus dem Vorwort des vorliegenden Teiles erfährt, was eigentlich alles an Arbeit geleistet werden muß, um ein solches Standardwerk zu dem zu machen, was es ist.

Zahlenangaben aus dem Vorwort ist zu entnehmen, daß gegenüber 5400 Autoren im Band V der jetzige Band VI über 10000 Autoren im ganzen enthalten wird. Wir wünschen uns und dem Verlag, daß der letzte Teil IV des Bandes VI nicht mehr allzu lange auf sich warten lassen muß.

L. Schiller

F. Löwe, Optische Messungen des Chemikers und des Mediziners. (Technische Fortschrittsberichte Bd. 6.) 3. erweiterte und neubearbeitete Auflage. 8°. XIV u. 256 S. 95 Abb. und 4 Spektraltafeln. Dresden 1939. Theodor Steinkopff. Brosch. RM 9.—, geb. RM 10.—.

In dieser Neuauflage hat der Verfasser eine gründliche Bearbeitung des bisherigen Materials vorgenommen und damit eine Übersicht über die angewandte Spektroskopie, die Kolorimetrie, die Refraktometrie und die Interferometrie gegeben, die auch die jüngste Entwicklung dieser Gebiete befriedigend berücksichtigt. Die Arbeitsverfahren werden zunächst grundsätzlich erörtert und dann die dafür vorhandenen Instrumente mit ihren sie kennzeichnenden Eigenschaften besprochen. Dabei finden sich wertvolle Hinweise, wie sich einzelne Methoden auf andere, ferner liegende Gebiete übertragen lassen könnten. Umfangreiche, sorgsam zusammengestellte Literaturangaben vervollständigen dieses schon gut eingeführte Hilfsbuch, das keiner weiteren Empfehlung mehr bedarf.

F. Rogowski

Wilhelm Schlink, Technische Statik. Ein Lehrbuch zur Einführung ins technische Denken. Gr.-8°. IX u. 386 S. Mit 463 Fig. Berlin 1939. Julius Springer. Geh. RM 27.60, geb. RM 29.40.

Dieser überaus inhaltsreiche, durch gebührende Berücksichtigung auch der räumlichen Probleme besonders gekennzeichnete Leitfaden der Statik starrer Körper wird vielen Ingenieuren und manchem Physiker gewiß willkommen sein. Die durch und durch anschaulich gehaltene, auf eine Einführung in technisches Denken zielbewußt ausgerichtete Darstellung legt Seite für Seite von der langjährigen Lehrerfahrung des Verfassers beredtes Zeugnis ab; sie wird durch eine erhebliche Anzahl von Zahlenbeispielen sowie von vollständig gelösten Übungsaufgaben zugleich belebt und vertieft, wobei sowohl die analytischen als auch die graphischen Verfahren (nebeneinander oder in Verbindung miteinander) zur Geltung gelangen. Im Interesse des Lernenden wäre vielleicht an verschiedenen Stellen eine etwas größere Schärfe in begrifflicher Hinsicht wünschenswert gewesen — eine Bemerkung, mit der jedoch dem unbedingt günstigen Eindruck des Ganzen keine wesentliche Beeinträchtigung widerfahren kann.

Harry Schmidt

Max Volmer, Kinetik der Phasenbildung. Band 4 der Sammlung „Die chemische Reaktion". Hrsgg. von K. F. Bonhoeffer. 8°. XII u. 220 Seiten. 61 Abb. Dresden u. Leipzig 1939. Verlag Theodor Steinkopff. RM 19.—, geb. RM 21.—.

Wenige Bücher unter den physikalisch-chemischen Neuerscheinungen der letzten Jahre dürften so warm begrüßt worden sein wie das vorliegende.

In jeder Hinsicht erscheint es dem Referenten besonders ausgezeichnet. Es füllt eine offenbare Lücke im Schrifttum aus, und von seinem Verfasser wissen wir, daß er wie kein anderer dieses Buch zu schreiben berufen war. Dies macht sich u. a. dadurch bemerkbar, daß „nicht veröffentlichte Überlegungen im Text einen relativ breiten Raum einnehmen", wie im Vorwort gesagt wird. Von einem einheitlichen Standpunkt aus werden die kinetischen Gesetzmäßigkeiten der Phasenbildung abgeleitet. Das gesteckte Ziel wird mit großer Klarheit verfolgt, unbekümmert um vieles am Wege liegende, nötigenfalls aber unter Ausnutzung weit hergeholten Materials.

Auf den ersten 21 Seiten wird ein Überblick über die Entwicklung unserer Kenntnisse von der Neubildung der Phasen gegeben, der sicherlich für alle spätere Beurteilung der Verdienste auf diesem Gebiet richtunggebend sein wird, und in dem der Leser zugleich mit den in den nächsten Kapiteln behandelten Problemen bekannt gemacht wird.

Im 2. Kapitel wird auf 55 Seiten der Übergang einzelner Teilchen zwischen zwei Phasen behandelt. Den breitesten Raum nimmt in engem Anschluß an die Experimente die Diskussion des Übergangs zwischen Gas und kondensierter Phase ein, während von dem zwischen zwei kondensierten Phasen (Kristall-Kristall und Kristall-Flüssigkeit), dem Stand unserer Kenntnisse entsprechend, nur ein theoretisches Bild entworfen wird. Bemerkenswert ist in diesem Kapitel die leicht verständliche Einführung der Gibbsschen thermodynamischen Potentiale, deren Gleichheit durchweg als Kriterium für das Gleichgewicht zweier Phasen benutzt wird.

Die „allgemeine Theorie der Überschreitung und Keimbildung" bringt das 3. Kapitel, das besonders durch die beiden ersten, wenige Seiten umfassenden, allgemeinen Abschnitte (Überschreitung, Keimbildung) auf spätere Darstellungen dieses Gebietes nachhaltigen Einfluß ausüben dürfte. So finden sich hier z. B. (und später im 4. Kapitel) eine kritische Beleuchtung des gelegentlich diskutierten Zusammenhanges zwischen wirklich beobachtetem Überschreitungsbereich bei Übergängen zwischen Dampf und Flüssigkeit und den Umkehrpunkten der van der Waals-Kurve. Stets wird Keimbildung beobachtet, ehe die Umkehrpunkte der Kontinuitätskurve erreicht sind. Im übrigen nehmen in diesem Kapitel Erläuterungen und Beispiele zu den allgemeinen Gesetzen den Hauptraum ein.

Das 4. Kapitel ist das umfangreichste des ganzen Buches und bringt die spezielle kinetische Behandlung charakteristischer Fälle und experimentelle Bestätigungen. Hier finden wir viele in der Praxis uns begegnende Fälle erläutert: Tröpfchenbildung in Dämpfen, Tröpfchen um Gasionen, Mischtröpfchen, Zerreißfestigkeit von Flüssigkeiten, Kristallkeimbildung aus dem Dampf und aus der Schmelze und endlich die Keimbildung an Grenzflächen, u. a. auch an Elektroden. In zwei kurzen letzten Kapiteln wird die „Art der neuen Phase" (enthaltend eine Kritik der Stufenregel als Naturprinzip) und die „Struktur der neuen Phase" besprochen.

Am Schluß findet man ein Verzeichnis der Definitionen, Gesetze und Formeln; die Handhabung des Buches würde sicher für den Fernerstehenden eine Erleichterung erfahren, wenn dieses Verzeichnis zu einem wirklichen Sachregister ausgestaltet würde. Berühren doch beispielsweise allein die ersten 25 Seiten des 2. Kapitels schon zahlreiche Probleme, wie Akkommodation, Reflexion von Atomen an Oberflächen kondensierter Phasen, Energieübertragung beim Stoß, sterische Hinderung, wiederholbarer Schritt beim Kristallwachstum, Schwingungsvolumen usw. usw., die nicht in diesem Verzeichnis stehen, und auf die man jetzt nur beim Lesen des Textes stößt.

In dem Buch treten Ungesichertes und Anschauungen ephemeren Charakters nicht hervor, sondern werden allenfalls kritisch erwähnt, so daß es unabhängig von der weiteren Entwicklung bleibenden Wert besitzen wird. Wir wissen, daß das Buch die Frucht einer jahrzehntelangen Beschäftigung mit dem Gebiet ist, und dürfen überzeugt sein, daß ihm ein ganz besonderer und dauerhafter Erfolg beschieden ist. K. Wirtz

---

Sir Chandrasekhara Venkata Raman, Jubilee Volum of Original Papers, presented in Commemoration of his fiftieth birthday. Proc. Indian Acad. Sci. 17. XI. 1938. 8. S. 243—365. Mit einem Bilde C. V. Ramans. Bangalore 1938. Hebbal P. O.

Zum 50. Geburtstag des verdienstvollen indischen Physikers C. V. Raman und zugleich zur Vollendung des zehnten Forschungsjahres auf dem Gebiet des Ramaneffektes wurde von der indischen Akademie der Wissenschaften in Bangalore ein Jubiläumsband herausgegeben. In diesem sind 38 Originalbeiträge von Autoren aus Deutschland, Italien, England, Frankreich, Amerika, Indien, Schweiz, Japan über den Ramaneffekt, die klassische Streuung, den Ultraschall, über Kerndistanzen und Bindungskräfte zusammengestellt. Über den Inhalt aller dieser Arbeiten wurde in den physikalischen Berichten bereits referiert. Eingeleitet wird der Jubiläumsband durch eine kurze Darstellung von Ramans Lebenslauf und wissenschaftlicher Tätigkeit. K. W. F. Kohlrausch

NACHRICHTEN

R. Fuess, Berlin-Steglitz. Am 1. April d. Js. konnten die feinmechanischen und optischen Werke von R. Fuess, Berlin-Steglitz, auf ein 75jähriges Bestehen zurückblicken. Rudolf Fuess, der Gründer der Firma, gehört zu den Mitbegründern der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, der Deutschen Gesellschaft für Mechanik und Optik und der Zeitschrift für Instrumentenkunde. Auf ihn ist auch die Entwicklung und die seit etwa 50 Jahren gepflegte Fabrikation von hydrologischen Meßgeräten (Pegelapparaten) zurückzuführen.

Seit 1913 wird die Firma von dem Sohn des Gründers, Paul Fuess, geleitet.

Berichtigung

S. 144, unter Abb. 25, vierte Zeile von oben muß es statt Bildern, Modellen heißen.

Verantwortlicher Schriftleiter: Professor Dr. Dr. h. c. P. Debye, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany

PHYS
JAHRBU
Nr. 9/10

Abhandlungen: